CAPÍTULO 7

LOGARÍTMOS

La importancia del estudio de los logarítmos radica en que, gracias a ellos, se facilita la resolución de cálculos muy complejos, por ejemplo, es posible convertir las operaciones de producto, cociente a sumas, diferencia que resultan naturalmente más fáciles de resolver que el producto y cociente. Si bien es cierto que son elementos de estudios fundamentales en la matemática, lo importante de los logaritmos está en las posibilidades de aplicación que tienen en la vida real.

7.1 ECUACIONES EXPONENCIALES

Definición. - Una ecuación en la que la incógnita aparece como exponente se llama ecuación exponencial.

Para resolver ecuaciones exponenciales utilizamos el siguiente:

Teorema 1.- Sea $a \in \mathrm{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, y sean $x, y \in \mathrm{R}$.

1. $a^x = a^y \Rightarrow x = y$ 2. $x^x = a^a \Rightarrow x = a$

3. $x^a = y^a \Rightarrow x = y$ 4. $\sqrt[x]{x} = \sqrt[a]{a} \Rightarrow x = a$

Directrices para resolver ecuaciones exponenciales

1. Para resolver ecuaciones exponenciales debemos igualar las bases de las potencias o los exponentes de las bases dependiendo del enunciado de la ecuación a resolver.
2. Utilizar el teorema 1 para "trasformar" una ecuación exponencial en una ecuación algebraica.
3. Resolver la ecuación por los métodos estudiados en anteriores capítulos

Ejemplo 1. Resolver la ecuación $3^{2x+5} = 27^{x+2}$

Solución

$3^{2x+5} = 3^{3(x+2)}$ igualando bases

$2x + 5 = 3x + 6$ por el teorema 1

$x = -1$ solución de la ecuación

Ejemplo 2. Resolver la ecuación $4^x + 2^x = 72$

Solución

$\left(2^x\right)^2 + 2^x - 72 = 0$ expresando en potencias

$\left(2^x + 9\right)\left(2^x - 8\right) = 0$ factorizando por aspa

$2^x + 9 = 0 \Rightarrow 2^x = -9$ no se puede igualar bases no es solución

$2^x - 8 = 0 \Rightarrow 2^x = 8$

$2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$ solución de la ecuación.

Ejemplo 3. Resolver la ecuación $\sqrt[x-1]{\sqrt[3]{2^{3x-1}}} = \sqrt[3x-7]{8^{x-3}}$

Solución

$2^{\frac{3x-1}{3(x-1)}} = 2^{\frac{3(x-3)}{3x-7}}$ igualando bases

$\dfrac{3x-1}{3(x-1)} = \dfrac{3(x-3)}{3x-7}$ por el teorema 1

$9x^2 - 24x + 7 = 9x^2 - 36x + 27$ resolviendo la ecuación

$12x = 20 \Rightarrow x = \dfrac{5}{3}$ solución de la ecuación

Ejemplo 4. Resolver la ecuación $(x-1)^{(x-1)^3} = \sqrt[\sqrt{3}]{3}$

Solución

$(x-1)^{(x-1)^3} = \sqrt[2\sqrt{3}]{3}$

$\left[(x-1)^{(x-1)^3}\right]^3 = \left(3^{\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)}\right)^3$ elevando al cubo $(x-1)^{3(x-1)^3} = \left(3^{\frac{1}{2\sqrt{3}}}\right)^{\sqrt{3}\sqrt{3}}$

$(x-1)^{3(x-1)^3} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\sqrt{3}}$ entonces $(x-1)^{3(x-1)^3} = \left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{3}}$

$(x-1)^3 = \sqrt{3}$ por el teorema 1

$\sqrt[3]{(x-1)^3} = \sqrt[3]{\sqrt{3}}$ extrayendo raíces cubicas

$x - 1 = \sqrt[6]{3} \Rightarrow x = 1 + \sqrt[6]{3}$ solución de la ecuación

Definición.- Se denomina logarítmo de un número positivo N (llamado argumento) en una base dada b positiva y diferente de la unidad $(b > 0,\ b \neq 1)$, al exponente real x al que debe elevarse la llamada base para obtener una potencia igual al número dado. Esto es:

$$\underbrace{\log_b N = x}_{\text{forma logarítmica}} \quad \text{si y sólo si} \quad \underbrace{N = b^x}_{\text{forma exponencial}}$$

los siguientes enunciados son pares equivalentes de ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Ecuación logarítmica		Ecuación exponencial
$\log_8 4 = \dfrac{2}{3}$	$\Leftrightarrow$	$4 = 8^{\frac{2}{3}}$
$\log_3 y = x$	$\Leftrightarrow$	$y = 3^x$
$\log_3\left(\dfrac{1}{9}\right) = -2$	$\Leftrightarrow$	$\dfrac{1}{9} = 3^{-2}$
$\log_3(81) = 4$	$\Leftrightarrow$	$81 = 3^4$
$\log_5\left(125\sqrt{5}\right) = \dfrac{7}{2}$	$\Leftrightarrow$	$125\sqrt{5} = 5^{\frac{7}{2}}$

Ejemplo 1. Resolver la ecuación $\log_2\left(x^2-5x-4\right)=1$

Solución

$x^2-5x-4=2$ aplicando la definición

$\left(x-6\right)\left(x+1\right)=0$ factorizando por aspa

$x_1-6=0 \Rightarrow x_1=6$

$x_2+1=0 \Rightarrow x_2=-1$

Verifiquemos la solución

Si $x_1=6$ sustituyendo $\log_2\left(6^2-5(6)-4\right)=1 \Rightarrow \log_2 2=1$ por tanto $1=1$

Si $x_2=-1$ sustituyendo $\log_2\left[(-1)^2-5(-1)-4\right]=1 \Rightarrow \log_2 2=1$ por tanto $1=1$

Luego $x_1=6$ y $x_2=-1$ son soluciones de la ecuación.

Ejemplo 2. Resolver la ecuación $\log_4\left[\log_3\left(\log_2 x\right)\right]=0$

Solución

$\log_3\left(\log_2 x\right)=4^0$ por definición

$\log_3\left(\log_2 x\right)=1$ entonces $\log_2 x=3$ luego $x=2^3 \Rightarrow x=8$ solución de la ecuación

7.2 PROPIEDADES DE LOGARÍTMOS

Las dos bases que se emplean con mayor frecuencia para los logarítmos son:

- La base 10 llamado logarítmo común y se denotan como: $x=\log y$
- La base e llamado logarítmo natural o neperiano cuya base es un número irracional con un valor 2.718.. y es denotado por $x=\ln y$

Un logarítmo que tiene una base b se expresara como $x=\log_b y$

El uso de logarítmos puede dar como resultado cierta eficiencia cuando se requieran cálculos de números muy grandes o muy pequeños, esta eficiencia se logra gracias a las siguientes propiedades siendo las; más importantes las siguientes:

1. $\log_b b=1$
2. $\log_b 1=0$
3. $\log_b\left(M.N\right)=\log_b M+\log_b N$
4. $\log_b\left(\dfrac{M}{N}\right)=\log_b M-\log_b N$
5. $\log_b M^n=n\log_b M$
6. $b^{\log_b N}=N$
7. $\log_a N=\dfrac{\log_b N}{\log_b a}$
8. $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$
9. $\log_{a^n} b^m=\dfrac{m}{n}\log_a b$
10. $\log_{\sqrt[n]{b}} A=\log_b A^n$

Ejemplo 1. Hallar el valor de $A = 7^{2\left(1-\log_7 2\right)} + 5^{-\log_5 4}$

Solución

$$A = 7^{2\left(\log_7 7-\log_7 2\right)} + 5^{\log_5 4^{-1}} \quad \text{propiedad 1 y 5}$$

$$A = 7^{2\log_7\left(\frac{7}{2}\right)} + 4^{-1} \quad \text{propiedad 4 y 6}$$

$$A = 7^{\log_7\left(\frac{7}{2}\right)^2} + \frac{1}{4} \quad \text{propiedad 6}$$

$$A = \left(\frac{49}{4}\right) + \frac{1}{4}$$

$$A = \frac{25}{2}$$

Ejemplo 2. Hallar el valor de $B = \log_{\sqrt{x}} \sqrt[3]{x} + \log_{\sqrt[6]{x}} x^4$

Solución

$$B = \log_{x^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{1}{3}} + \log_{x^{\frac{1}{6}}} x^4 \quad \text{expresando los radicales en forma de potencia}$$

$$B = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}\log_x x + \frac{4}{\frac{1}{6}}\log_x x \quad \text{propiedad 9 y 1}$$

$$B = \frac{2}{3} + 24$$

$$B = \frac{74}{3}$$

Ejemplo 3. Hallar el valor de $C = \dfrac{\log_2 \sqrt[3]{2} - \log_2 \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}{\log_2 \sqrt{2\sqrt{2}}} + \dfrac{\log_2 \left(\sqrt{2}\right)^{-1}}{1-\log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}$

Solución

$$C = \frac{\log_2 2^{\frac{1}{3}} - \log_2 2^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{4}}2^{\frac{1}{8}}}{\log_2 2^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{4}}} + \frac{\log_2 2^{-\frac{1}{2}}}{1-\log_2 2^{\frac{1}{8}}} \quad \text{expresamos los radicales en potencia}$$

$$C = \frac{\frac{1}{3}\log_2 2 - \frac{7}{8}\log_2 2}{\frac{3}{4}\log_2 2} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\log_2 2}{1-\frac{1}{8}\log_2 2} \quad \text{la propiedad 5 y 1}$$

$$C = \frac{\frac{1}{3}-\frac{7}{8}}{\frac{3}{4}} - \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{8}} \quad \text{hallando el mcm}$$

$$C = -\frac{13}{18} - \frac{8}{14} \quad \text{haciendo medios y extremos}$$

$$C = -\frac{163}{126} \quad \text{valor buscado}$$

7.3 ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Definición. - Es una ecuación que contiene uno o más términos logarítmicos de una o más incógnitas.

Teorema 2.- Si los argumentos A , $B > 0$, además la base $b > 0$, $b \neq 1$, entonces:

$$\log_b A = \log_b B \Rightarrow A = B$$

Directrices para resolver ecuaciones logarítmicas

1. Para resolver ecuaciones logarítmicas las bases deben ser iguales
2. Utilizar propiedades y la definición para transformar a la ecuación a una ecuación algebraica sin logarítmos
3. Resolver la ecuación nueva por cualquier método estudiado en los capítulos anteriores
4. Verificar los resultados encontrados en la ecuación original

Ejemplo 1. Resolver $\log_5 x - \log_5 (x-2) = \log_5 2$

Solución

$\log_5 \dfrac{x}{x-2} = \log_5 2$ por la propiedad 4

$\dfrac{x}{x-2} = 2$ por el teorema 2

$x = 2x - 4$

$x = 4$

verificando la solución

$\log_5 4 - \log_5 2 = \log_5 \left(\frac{4}{2}\right) = \log_5 2$

Cumple la igualdad

Ejemplo 2. Resolver la ecuación $\log x + \log\left(x-1\right) = \log\left(3\log_2 4\right)$

Solución

$\log x\left(x-1\right) = \log\left(3\log_2 2^2\right)$ por la propiedad 3 y 5

$x^2 - x = 6\log_2 2$ usando el teorema 2

$x^2 - x = 6$ por la propiedad 1

$x^2 - x - 6 = 0$ ecuación de segundo grado

$\left(x-3\right)\left(x+2\right) = 0$ resolviendo la ecuación por factorización

$x_1 - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$

$x_2 + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$

verificando la solución

Si $x_1 = 3$

$\log 3 + \log 2 = \log\left(3\log_2 4\right) \Rightarrow \log 6 = \log 6$ solución única

Si $x_2 = -2$

$\log\left(-2\right) + \log\left(-3\right) = \log\left(3\log_2 4\right)$ no es solución porque $\nexists$ logarítmos negativos

Ejemplo 3. Resolver la ecuación $\dfrac{\log\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\log\sqrt[3]{x-40}}=3$

Solución

$\log\left(\sqrt{x+1}+1\right)=3\log\sqrt[3]{x-40}$ hallando el mcm

$\log\left(\sqrt{x+1}+1\right)=\log\left(\sqrt[3]{x-40}\right)^3$ usando la propiedad 5

$\log\left(\sqrt{x+1}+1\right)=\log\left(x-40\right)$ simplificando el índice con el exponente

$\sqrt{x+1}+1=x-40$ aplicando el teorema 2

$\left(\sqrt{x+1}\right)^2=\left(x-41\right)^2$ elevando ambos miembros al cuadrado

$x+1=x^2-82x+1681$ productos notables

$x^2-83x+1680=0$ ecuación de segundo grado

$\left(x-48\right)\left(x-35\right)=0$ factorizando por aspa

$x-48=0\Rightarrow x_1=48$

$x-35=0\Rightarrow x_2=35$

verificando la solución

si $x_1=48$ tenemos $\dfrac{\log\left(\sqrt{49}+1\right)}{\log\sqrt[3]{8}}=3\Rightarrow\dfrac{\log 8}{\log 2}=3\Rightarrow 3=3$ solución única

si $x_2=35$ tenemos $\dfrac{\log\left(\sqrt{36}+1\right)}{\log\sqrt[3]{-5}}=3$ no es solución porque $\nexists$ logarítmos negativos

Ejemplo 4.Resolver la ecuación $\ln x^2+\ln x=9$

Solución

$\ln x^3=9$ por la 3ra. propiedad

$3\ln x=9$ aplicando la 5ta. propiedad

$\ln x=3\Leftrightarrow x=e^3$ usando la definición

verificando la solución

si $x=e^3$ tenemos $\ln\left(e^3\right)^2+\ln\left(e^3\right)=9\Rightarrow 6\ln e+3\ln e=9\Rightarrow 9=9$ solución única

Ejemplo 5. Resolver la ecuación $e^{2x}=5$

Solución

$\ln e^{2x}=\ln 5$ logarítmos a ambos miembros

$2x\ln e=\ln 5$ usando la 5ta. propiedad

$x=\dfrac{\ln 5}{2}\simeq 0.8047$

verificando la solución

si $x=\dfrac{\ln 5}{2}$

$e^{2\left(\frac{\ln 5}{2}\right)}=5\Rightarrow e^{\ln 5}=5\Rightarrow 5=5$

solución única

Ejemplo 6. Resolver la ecuación $5^{\log y} - 3^{\log y - 1} = 3^{\log y + 1} - 5^{\log y - 1}$

Solución

$5^{\log y} + 5^{\log y} \times 5^{-1} = 3^{\log y} \times 3^{1} + 3^{\log y} \times 3^{-1}$ descomponiendo los exponentes

$5^{\log y}\left(1 + 5^{-1}\right) = 3^{\log y}\left(3 + 3^{-1}\right)$ factorizando

$\dfrac{5^{\log y}}{3^{\log y}} = \dfrac{\left(3 + 3^{-1}\right)}{\left(1 + 5^{-1}\right)}$ aislando la variable

$\left(\dfrac{5}{3}\right)^{\log y} = \dfrac{50}{18}$ propiedades de exponentes

$\left(\dfrac{5}{3}\right)^{\log y} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^{2}$ igualando bases

$\log y = 2 \Rightarrow y = 10^{2}$ teorema 1 y definición

verificando la solución

si $y = 10^{2}$

$5^{\log 10^{2}} - 3^{\log 10^{2} - 1} = 3^{\log 10^{2} + 1} - 5^{\log 10^{2} - 1}$

$5^{2\log 10} - 3^{2\log 10}3^{-1} = 3^{2\log 10}3 - 5^{2\log 10}5^{-1}$

$25 - 9\left(\frac{1}{3}\right) = 27 - 25\left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow 22 = 22$

solución única

7.4 APLICACIÓN DE LOS LOGARÍTMOS A LAS ECUACIONES EXPONENCIALES

En la resolución de las ecuaciones exponenciales existen casos en que no es posible igualar bases.

Directrices para resolver ecuaciones exponenciales aplicando logarítmos

1. Se aplican logarítmos en ambos miembros
2. Se utilizan las propiedades de logarítmos y los teoremas 1 y 2 para la resolución
3. Verificar los resultados encontrados en la ecuación original

Ejemplo 1. Resolver las ecuaciones $2^{x+1} \times 5^{x} = 8$

Solución

$\log\left(2^{x+1} \times 5^{x}\right) = \log 8$ aplicando logarítmos ambos miembros

$\log 2^{x+1} + \log 5^{x} = \log 8$ 3era. propiedad

$\left(x + 1\right)\log 2 + x \log 5 = \log 8$ 5ta. propiedad

$x \log 2 + \log 2 + x \log 5 = \log 8$ propiedad distributiva

$x\left(\log 2 + \log 5\right) = \log 8 - \log 2$ factor común

$x\left[\log\left(2 \times 5\right)\right] = \log \dfrac{8}{2}$ 3era. propiedad

$x\left[\log\left(10\right)\right] = \log 4$ 1era. propiedad

$x = \log 4$

verificando la solución

Si $x = \log 4$ entonces $2^{\log 4 + 1} \times 5^{\log 4} = 8 \Rightarrow 2^{\log 2^{2}} 2 \times 5^{\log 4} = 8$

7.5 SISTEMAS DE ECUACIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

Definición. - Un sistema de ecuaciones logarítmicas o exponenciales es aquel que está formando por dos o más ecuaciones logarítmicas o exponenciales

Directrices para resolver sistemas de ecuaciones con logarítmos

1. Para resolver sistemas que contienen logaritmos o exponentes se tiene transformar cada ecuación que contenga logaritmos o exponentes a ecuaciones algebraicas simples es decir sin logaritmos utilizando las propiedades.
2. Cuando las ecuaciones son algebraicas se utiliza cualquier método estudiado en anteriores capítulos para encontrar la solución.
3. Verificar las soluciones encontradas en cualquiera de las ecuaciones del sistema original.

Ejemplo 1. Resolver el sistema $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y & = \log_3 12 \\ x + y & = 7 \end{cases}$

Solución

$\log_3 x.y = \log_3 12 \Rightarrow xy = 12$ usando la 3era. propiedad y teorema 2 en la1ra ecuación

$\begin{cases} x.y & = 12 \\ x + y & = 7 \end{cases}$ nuevo sistema algebraico

$y = \dfrac{12}{x}$ de la primera ecuación despejamos *y*

$x + \dfrac{12}{x} = 7$ sustituyendo en la segunda ecuación

$x^2 - 7x + 12 = 0$ hallando el mcm

$(x-4)(x-3) = 0$ factorizando por aspa

$x_1 = 4 \Rightarrow y_1 = 3$ y $x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 4$ soluciones del sistema

verificando las soluciones en la primera ecuación

Si $x_1 = 4,\ y_1 = 3$ tenemos $\log_3 4 + \log_3 3 = \log_3 12 \Rightarrow \log_3 12 = \log_3 12$

Si $x_2 = 3,\ y_2 = 4$ tenemos $\log_3 3 + \log_3 4 = \log_3 12 \Rightarrow \log_3 12 = \log_3 12$

Ejemplo 2. Resolver el sistema $\begin{cases} \log_a x + \log_a y = 2 \\ \log_b x - \log_b y = 4 \end{cases}$

Solución

$\begin{cases} \log_a xy = 2 & \Rightarrow & xy = a^2 \text{ usando la tercera propiedad y la definicion} \\ \log_b \dfrac{x}{y} = 4 & \Rightarrow & \dfrac{x}{y} = b^4 \text{ usando la cuarta propiedad y la definicion} \end{cases}$

$x = b^4 y$ despejando la variable *x* de la segunda ecuación

$\left(b^4 y\right) y = a^2$ remplazando en la primera ecuación el valor de x

$y^2 = \left(\frac{a}{b^2}\right)^2$ aislando la variable

$y^2 - \left(\frac{a}{b^2}\right)^2 = 0$ realizando operaciones

$\left(y - \frac{a}{b^2}\right) \underbrace{\left(y + \frac{a}{b^2}\right)}_{\text{no es solución}} = 0$ productos notables

$y_1 - \dfrac{a}{b^2} = 0$

$y_1 = \dfrac{a}{b^2}$ y $x_1 = ab^2$ solución única del sistema

Ejemplo 3. Resolver el sistema $\begin{cases} \log(x-1) - \log(1-y) = 0 \\ \dfrac{1}{9}\sqrt[y]{9^x} - 27\sqrt[x]{27^y} = 0 \end{cases}$

Solución

$$\begin{cases} \log(x-1) = \log(1-y) \\ 3^{-2} \times 3^{2\left(\frac{x}{y}\right)} = 3^3 \times 3^{3\left(\frac{y}{x}\right)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 1 = 1 - y & \text{aplicando el teorema 2} \\ 3^{-2+\frac{2x}{y}} = 3^{3+\frac{3y}{x}} & \text{por exponentes} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -2 + \dfrac{2x}{y} = 3 + \dfrac{3y}{x} \end{cases} \text{ entonces } \begin{cases} x + y = 2 \Rightarrow x = 2 - y \\ \dfrac{2x}{y} - \dfrac{3y}{x} = 5 \end{cases}$$

$\dfrac{2\left(2-y\right)}{y} - \dfrac{3y}{2-y} = 5$ sustituyendo el valor de x en la 2da.ecuación

$2\left(2-y\right)^2 - 3y^2 = 5y\left(2-y\right)$ hallando el mcm

$2\left(4 - 4y + y^2\right) - 3y^2 = 10y - 5y^2$ aplicando productos notables

$4y^2 - 18y + 8 = 0$ simplificando factores comunes

$\left(y-4\right)\left(2y-1\right) = 0$ factorizando por aspa

$y = 4 \Rightarrow x = -2$ no es solución del sistema

$y = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$ soluciones únicas del sistema

7.6 EJERCICIOS PROPUESTOS

I. Hallar el valor de las siguientes expresiones

1. $A = \log_3 \sqrt[5]{3} + \log_3 27 + \log_3 \frac{1}{9}$ R. $A = \dfrac{6}{5}$

2. $B = \log_u u\sqrt[3]{u} + \log_{\frac{1}{u}} \left(\dfrac{\sqrt[5]{u}}{\sqrt{u}}\right)$ R. $B = \dfrac{49}{30}$

3. $C = \log_{x-y} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-y}} + \log_{\frac{x}{y}} \dfrac{y}{x} + \log_{a+b} \sqrt{a+b}$ R. $C = -\dfrac{5}{6}$

4. $D = \dfrac{\log_5 \sqrt[5]{5} + \log_7 2401 + \log_3 9^{-1}}{2\log_2 4 - \log_7 \sqrt[3]{7}}$ R. $D = \dfrac{3}{5}$

II. Resolver las ecuaciones logarítmicas

1. $\log\sqrt{x+4} - \log\left(3x\right) = -2\log 3$ R. $x = 12$

2. $\ln x - \ln(x-2) = \ln(4x-3) - \ln 3$ R. $x = 3$

3. $\log_b(x-1) + \log_b\left(x+1\right) - \log_b\left(x-2\right) - \log_b\left(x+2\right) = 0$

4. $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$ R. $x = 27$

5. $\log_x\left(5x^2\right) \times \log_5^2 x = 1$ R. $x_1 = 5^{-1}, \quad x_2 = \sqrt{5}$

6. $\log(x+7) - \log 1{,}2 = 1 - \log\sqrt{x+14}$ R. $x = 2$

7. $2\log_3 x + 3\log_{27} x = 15$ R. $x = 243$

8. $x\log 2 + \log\log 2 = \log\log 16$ R. $x = 2$

9. $x^{\log x} - \left(\dfrac{10^3}{x}\right)^4 = 0$ R. $x_1 = 10^{-6}$, $x_2 = 10^2$

10. $\dfrac{e+1}{\sqrt{e}^{\ln x}} = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$ R. $x_1 = 5$, $x_2 = \dfrac{1}{5}$

III. Resolver las ecuaciones exponenciales

1. $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x \left(\dfrac{5}{2}\right)^{4x-2} - \dfrac{4}{25} = 0$ R. $x = 0$

2. $\dfrac{1}{5^x + 3} = \dfrac{1}{5^{x+2} - 1}$ R. $x = -\log_5 6$

3. $6^x + 6^{-x} = 2$ R. $x = 0$

4. $32^{\frac{x+5}{x-7}} = \left(\dfrac{1}{4}\right) 128^{\frac{x+17}{x-3}}$ R. $x = 10$

5. $\left[2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right]^{\sqrt{x}-1} = 4$ R. $x = 9$

6. $5^{x^2-5x+6} = 1$ R. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$

7. $7^{2x+3} - 8 \times 7^{x+1} = -1$ R. $x_1 = -1$, $x_2 = -2$

8. $4^{x+1} \times 8^x = 4096$ R. $x = 2$

9. $e^{2x-1} = \sqrt[4]{2^3}$ R. $x = \dfrac{4 + 3\ln 2}{8}$

10. $e^{4x-2} = 28$ R. $x = \dfrac{2+\ln 28}{4}$

IV. Resolver los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} \log x - \log 5 = 3\log 5 \\ \log x^3 - \log y^2 = \log 2^4 \end{cases}$ R. $x = 5^4 \quad y = \frac{4}{5^6}$

2. $\begin{cases} \log x + y = 2\log 3 \\ x\log 2 + y\log 32 = \log 256 \end{cases}$ R. $x = 5 \quad y = 4$

3. $\begin{cases} \log\left(x+y\right) + \log\left(x-y\right) = \log 33 \\ e^x e^y = e^{11} \end{cases}$ R. $x = 7 \quad y = 4$

4. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 10000 \\ \left(x-y\right)^{\log(x+y)} = 1000 \end{cases}$ R. $x_1 = 505,\ y_1 = 495 \quad x_2 = 505,\ y_2 = -495$

5. $\begin{cases} 3\left[2\log_{y^2} x - \log_{\frac{1}{x}} y\right] = 10 \\ x\left(y\right) = 81 \end{cases}$ R. $x_1 = \frac{5}{4},\ y_1 = -\frac{3}{4} \quad x_2 = -\frac{1}{4},\ y_2 = -\frac{9}{4}$

6. $\begin{cases} 2^{x+1} + 3(2^y) = 22 \\ 3(2^x) - 2^{y+1} = 20 \end{cases}$ R. $x = 1,477 \quad y = 4,430$

7. $\begin{cases} \left(3x+y\right)^{x-y} = 9 \\ \sqrt[x-y]{324} = 18x^2 + 12xy + 12y^2 \end{cases}$ R. $x_1 = -3,\ y_1 = 9 \quad x_2 = 2,\ y_2 = 4$

8. $\begin{cases} 3\times 5^x + 2\times 6^{y+1} = 807 \\ 15\times 5^x + 6^y = 339 \end{cases}$ R. $x = 3 \quad y = 2$

9. $\begin{cases} 2^{2x} + 2^{2y} = 85 \\ 2^{2(x+y)} = 324 \end{cases}$ R. $x = 1 \quad y = \frac{\log 81}{2\log 2}$

10. $\begin{cases} xy = 64 \\ 5\left(\log_x y + \log_y x\right) = 26 \end{cases}$ R. $x_1 = 2,\ y_1 = 32 \quad x_2 = 32,\ y_2 = 2$