CAPÍTULO 4

EXPONENTES Y RADICALES

Definición.- Un exponente natural es un número $\left(n \in \mathrm{N}\right)$ que se escribe en la parte superior derecha de otro número o expresión llamado base que indica el número de veces que se va a multiplicar la base por ella misma, es decir:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ veces}}$$

4.1 LEYES DE LOS EXPONENTES

Sean *a* y *b* números reales positivos arbitrarios y *m*, *n* números enteros

1. $a^m a^n = a^{m+n}$
2. $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$
3. $\left(ab\right)^n = a^n b^n$
4. $a^0 = 1$, con $a \neq 0$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$
6. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ con $m > n$, $a \neq 0$
7. $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$
8. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{-n}$, $b \neq 0$

Ejemplo 1. Simplificar $A = \dfrac{2^{n+1} + 2^{n-1}}{2^{n-1} + 2^{n-2} - 2^{n-3}}$

Solución

$$A = \frac{2^n 2 + 2^n 2^{-1}}{2^n 2^{-1} + 2^n 2^{-2} - 2^n 2^{-3}}$$

$$A = \frac{2^n\left(2 + 2^{-1}\right)}{2^n\left(2^{-1} + 2^{-2} - 2^{-3}\right)} \quad \text{entonces} \quad A = \frac{2 + \dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8}}$$

$$A = \frac{\dfrac{5}{2}}{\dfrac{5}{8}} \quad \text{medios y extremos luego } A = 4$$

Ejemplo 2. Simplificar $B = \dfrac{\left(xy^{-1}\right)^{-2}}{x} \times \left(\dfrac{x}{y^{-1}}\right)^{-3}$

Solución

$$B = \frac{x^{-2}y^2}{x} \times \frac{x^{-3}}{y^3} \quad \text{aplicando leyes exponenciales}$$

$$B = x^{-2}x^{-3}\frac{1}{xy}$$

$$B = x^{-5}\frac{1}{xy}$$

$$B = \frac{1}{x^6 y}$$

Definición.- Todo número real positivo *b* determina un número real positivo $a = \sqrt[n]{b}$ a esta expresión léase "*a*" es igual a la raíz enésima de "*b*" por tanto *a* esta definido como aquel número real positivo cuya enésima potencia a^n es igual a *b*.

Los componentes de un radical son:

$\sqrt[n]{b}$ se llama radical
"*b*" cantidad subradical o radicando
"*n*" es el índice u orden del radical

En la práctica se prefiere ver al radical en forma de un exponente fraccionario, es decir:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

4.2 EXPONENTES FRACCIONARIOS EXPRESADOS EN RADICAL

Sean *a* y *b* dos expresiones algebraicas cualesquiera y *m, n,* $\in$ Z

1. $\sqrt[n]{a^n} = a$
2. $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$
3. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
4. $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
5. $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$
6. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
7. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$
8. $\sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a^{m+p}}$

Una expresión esta simplificada si todas las fracciones están simplificadas y todos los exponentes fraccionarios reducidos a sus términos más sencillos

Ejemplo 1. Hallar el valor numérico de $A = x^2 + 4x - 3$ cuando $x = -2 + \sqrt{5}$

Solución

$A = \left(-2 + \sqrt{5}\right)^2 + 4\left(-2 + \sqrt{5}\right) - 3$ reemplazando el valor de *x*

$A = 4 + 2\left(-2\right)\left(\sqrt{5}\right) + \left(\sqrt{5}\right)^2 + 4\left(-2\right) + 4\left(\sqrt{5}\right) - 3$ aplicando productos notables

$A = 4 - 4\sqrt{5} + 5 - 8 + 4\sqrt{5} - 3$ simplificando

$A = -2$

Ejemplo 2. Simplificar $B = \left(2x + 7\sqrt{x} - 15\right)\left(\frac{x - 5\sqrt{x}}{2x - 3\sqrt{x}}\right)$ cuando $x = 24$

Solución

$B = \left[2\left(\sqrt{x}\right)^2 + 7\sqrt{x} - 15\right]\left[\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 5\sqrt{x}}{2\left(\sqrt{x}\right)^2 - 3\sqrt{x}}\right]$ expresando $x = \left(\sqrt{x}\right)^2$

$B = \left(2\sqrt{x} - 3\right)\left(\sqrt{x} + 5\right)\frac{\left(\sqrt{x} - 5\right)\sqrt{x}}{\left(2\sqrt{x} - 3\right)\sqrt{x}}$

$B = \left(\sqrt{x} + 5\right)\left(\sqrt{x} - 5\right)$ entonces $B = x - 25$ sustituyendo x, $B = 24 - 25$ luego $B = -1$

Ejemplo 3. Simplificar $C = \dfrac{1}{\sqrt{x}+b} + \dfrac{x - b\sqrt{x}}{\sqrt{x^3} - b^2\sqrt{x}}$

Solución

$$C = \frac{1}{\sqrt{x}+b} + \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2 - b\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}\sqrt{x} - b^2\sqrt{x}} \quad \text{expresamos la variable } x \text{ en radicales}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{x}+b} + \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-b\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x^2}-b^2\right)} \quad \text{factorizamos el segundo término}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{x}+b} + \frac{\sqrt{x}-b}{\sqrt{x^2}-b^2} \quad \text{simplificamos el radical}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{x}+b} + \frac{\sqrt{x}-b}{\left(\sqrt{x}-b\right)\left(\sqrt{x}+b\right)} \quad \text{entonces} \quad C = \frac{1}{\sqrt{x}+b} + \frac{1}{\sqrt{x}+b}$$

$$C = \frac{2}{\sqrt{x}+b}$$

Ejemplo 4. Simplificar $D = \dfrac{1 + \dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{4-x^2}{4}}} - \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}}{2\sqrt{4-x^2} + 8 - 2x^2}$

Solución

$$D = \frac{1 + \dfrac{2}{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} - \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}}{2\left(\sqrt{4-x^2} + 4 - x^2\right)} \quad \text{propiedades de los radicales}$$

$$D = \frac{1 + \frac{4}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}}{2\left(\sqrt{4-x^2} + 4 - x^2\right)} \quad \text{medios y extremos en el numerador}$$

$$D = \frac{\dfrac{\sqrt{4-x^2} + 4 - x^2}{\sqrt{4-x^2}}}{2\left(\sqrt{4-x^2} + 4 - x^2\right)} \quad \text{mcm en el numerador}$$

$$D = \frac{\left(\sqrt{4-x^2} + 4 - x^2\right)}{2\left(\sqrt{4-x^2} + 4 - x^2\right)\sqrt{4-x^2}} \quad \text{medios y extremos}$$

$$D = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}$$

4.3 RACIONALIZACIÓN

Racionalizar el denominador de una fracción dada significa transformar en otra fracción equivalente de tal manera que el denominador sea racional es decir no contenga radicales.

Se tiene los siguientes casos

a) *Primer Caso*. Cuando el denominador tiene una sola raíz

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^c}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b^c}}\frac{\sqrt[n]{b^{n-c}}}{\sqrt[n]{b^{n-c}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-c}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-c}}}{b}$$

Directrices para racionalizar el primer caso

1. Multiplicar tanto el numerador como el denominador por la raíz del denominador cuyo radicando se eleva a la diferencia entre el índice y el exponente
2. Realizar operaciones aritméticas y simplificar hasta su mínima expresión.

Ejemplo 1. Racionalizar la expresión $A = \dfrac{3x}{\sqrt{7}}$

Solución

$$A = \frac{3x}{\sqrt{7}}\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{3x\sqrt{7}}{7}$$

Ejemplo 2. Racionalizar la expresión $B = \dfrac{8}{\sqrt[3]{5^2}}$

Solución

$$B = \frac{8}{\sqrt[3]{5^2}}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

b) *Segundo Caso*. Cuando el denominador presenta una suma o diferencia de raíces cuadradas

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{c}\right)^2} = \frac{a\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{b-c}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}\frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{c}\right)^2} = \frac{a\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}{b-c}$$

Directrices para racionalizar el segundo caso

1. Multiplicar tanto el numerador como el denominador por el conjugado del denominador
2. Utilice la siguiente identidad $\left(a+b\right)\left(a-b\right) = a^2 - b^2$
3. Realizar operaciones de aritméticas y simplificar

Ejemplo 1. Racionalizar la expresión $A=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

Solución

$$A=\frac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$$ multiplicando por su conjugado del denominador

$$A=\frac{x\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x-1}\right)^2}$$ aplicando la identidad

$$A=\frac{x\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{x+1-x+1}$$ simplificando los exponentes $A=\dfrac{x\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{2}$

Ejemplo 2. Racionalizar la expresión $B=\dfrac{x-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

Solución

$$B=\frac{x-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}$$ multiplicando por su conjugado del denominador

$$B=\frac{\left(x-4\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x-2}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$ aplicando la identidad

$$B=\frac{\left(x-4\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{x-2-2}$$ entonces $B=\dfrac{\left(x-4\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{\left(x-4\right)}$ luego $B=\sqrt{x-2}+\sqrt{2}$

c) *Tercer Caso*. Cuando el denominador presenta una suma o diferencia de raíces cubicas

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=\frac{a}{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}\frac{\left(\sqrt[3]{b}\right)^2-\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c}+\left(\sqrt[3]{c}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{b}\right)^2-\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c}+\left(\sqrt[3]{c}\right)^2}=\frac{a\left[\left(\sqrt[3]{b}\right)^2-\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c}+\left(\sqrt[3]{c}\right)^2\right]}{b+c}$$

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}}=\frac{a}{\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}}\frac{\left(\sqrt[3]{b}\right)^2+\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c}+\left(\sqrt[3]{c}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{b}\right)^2+\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c}+\left(\sqrt[3]{c}\right)^2}=\frac{a\left[\left(\sqrt[3]{b}\right)^2+\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c}+\left(\sqrt[3]{c}\right)^2\right]}{b-c}$$

Directrices para racionalizar el tercer caso

1. Multiplicar tanto el numerador como el denominador por el factor racionante del denominador, es decir:

   factor racionante de una suma $a+b$ es: a^2-ab+b^2

   factor racionante de una diferencia $a-b$ es: a^2+ab+b^2

2. Desarrollar el producto del denominador, aplicando la fórmula y simplificar los radicales

   $a^3+b^3=\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)$ $\qquad$ $a^3-b^3=\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)$

Ejemplo 1. Racionalizar la expresión $A=\dfrac{2x}{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2-x}}$

Solución

$$A=\frac{2x}{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2-x}}\frac{\left(\sqrt[3]{2+x}\right)^2+\sqrt[3]{2+x}\sqrt[3]{2-x}+\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{2+x}\right)^2+\sqrt[3]{2+x}\sqrt[3]{2-x}+\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^2}\quad\text{multiplicando por el factor racionante}$$

$$A=\frac{2x\left[\sqrt[3]{\left(2+x\right)^2}+\sqrt[3]{\left(2+x\right)\left(2-x\right)}+\sqrt[3]{\left(2-x\right)^2}\right]}{\left(\sqrt[3]{2+x}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^3}\quad\text{realizando operaciones}$$

$$A=\frac{2x\left[\sqrt[3]{\left(2+x\right)^2\left(2-x\right)^2}+\sqrt[3]{4+x^2}\right]}{2+x-2+x}\quad\text{luego}\quad A=\sqrt[3]{\left(4-x^2\right)^2}+\sqrt[3]{4+x^2}$$

4.4 EJERCICIOS PROPUESTOS

Simplificar los siguientes ejercicios usando las leyes exponenciales

1. $A=\sqrt[n]{\dfrac{64^n+16^n}{32^n+8^n}}$ R. $A=2$

2. $B=\dfrac{\left(a^2b^{-1}+b^2a^{-1}\right)\left(ab\left(a+b\right)^{-1}\right)}{a^{-2}+b^{-2}-\left(ab\right)^{-1}}$ R. $B=a^2b^2$

3. $C=\dfrac{1}{a}\left[\dfrac{x^a+\sqrt[a]{x}}{a+1}\right]^{a^2-1}$ Para $x=\sqrt[a+1]{\sqrt[a-1]{a^a}}$ R. $C=1$

4. $D=\left[\dfrac{1}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}}-\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}\right]\left(ab\right)^{-\frac{1}{2}}$ R. $D=1$

5. $E=\dfrac{\sqrt[n]{2^n+3^{-n}}+\sqrt[n]{24^n+4^n}}{\sqrt[n]{6^n+1}}$ R. $E=\dfrac{13}{3}$

6. $F=\sqrt[n]{\dfrac{\dfrac{3^{2n}\times 2^{2n+1}+36^n}{3^n\times 6-3^{n+1}}\left(3^{n^2-1}\right)^{\frac{1}{n+1}}}{3^{-1}\left(3^{-1}\right)^n}}$ R. $F=108$

7. $G=\dfrac{x^{-2}-2\left(xy\right)^{-1}+y^{-2}}{\left(yx^{-1}\right)^{-2}+x^{-1}y-2x^0}$ R. $G=\dfrac{x-y}{x^2(x+2y)}$

8. $H=\sqrt[n]{\dfrac{6^n+\dfrac{12^{n+2}\times 2^n}{4^{n+2}}-\dfrac{30^{n+1}}{5^{n+1}}}{5^n\times 2^{n+1}+10^n\times 25-\dfrac{14^n\times 23\times 5^n}{7^n}}}$ R. $H=\dfrac{3}{5}$

9. $I=\left[\dfrac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{a-4+3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right]^2$ R. $I=9a$

10. $J=\left(\dfrac{a^2-1}{n^2+an}\right)\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{n}}-1\right)\left(\dfrac{a-an^3-n^4+n}{1-a^2}\right)$ R. $J=\dfrac{n^2+n+1}{n}$

11. $K=\dfrac{\left[1-\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-2}\right]x^2}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2+2\sqrt{xy}}$ R. $K=x-y$

12. $L=\left[\dfrac{3y^{-\frac{1}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}-2y^{-\frac{1}{3}}}-\dfrac{y^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{4}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}\right]^{-1}-\left(\dfrac{1-2y}{3y-2}\right)^{-1}$ R. $L=\dfrac{y^2}{2y-1}$

13. $M=\sqrt[n]{\dfrac{x^2-1}{\frac{1}{(x-1)^{-1}(x+1)^{-1}}}\times\left(\dfrac{1}{x^{2x}}\right)^{-1}}$ si $n=\sqrt[x^{-1}]{\sqrt[x^{-2}]{\sqrt[x^{-3}]{(2x)^{x^{-6}}}}}$ R. $M=x$

14. $N=\left[\dfrac{2+ba^{-1}}{a+2b}-6b\left(4b^2-a^2\right)^{-1}\right]\div\left(2a^nb+3a^{n+1}-\dfrac{6a^{n+2}}{2a-b}\right)^{-1}$ R. $N=a^{n-1}b$

15. $P=\dfrac{1}{(a-b)^2}\sqrt[3]{\left(a^2-2ab+b^2\right)\left(a^2-b^2\right)(a+b)}\,\dfrac{a^3-b^3}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}$ R. $P=a^2+ab+b^2$

16. $Q=\sqrt[a-b]{\dfrac{xy}{\sqrt[b]{(xy)^a}}}\sqrt[b-1]{\dfrac{xy^b}{\sqrt[b]{xy}}}$ R. $Q=y$

17. $R=\dfrac{\sqrt[1-n]{n^2}+\left(n\ \sqrt[1-n]{n^n}\right)^2}{\sqrt[1-n]{n^{n+1}}}$ R. $R=\quad 2n$

18. $S=\dfrac{x\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2y\sqrt{x}}\right)^{-1}+y\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2x\sqrt{y}}\right)^{-1}}{\left(\frac{x+\sqrt{xy}}{2xy}\right)^{-1}+\left(\frac{y+\sqrt{xy}}{2xy}\right)^{-1}}$ R. $S=\sqrt{xy}$

19. $T=\left(\dfrac{4b^2+2ab}{\sqrt{4a^2b^2-8ab^3}}-\dfrac{\sqrt[4]{16^3}\sqrt{b^3}}{\sqrt{4a^2b-8ab^2}}\right)\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{2ab}-a^{-2}}}\sqrt{\frac{2a}{b}}$ R. $T=2a$

20. $U=\dfrac{(a-b)^3\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{-3}+2\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}-\dfrac{3\left(\sqrt{ab}-a\right)}{a-b}$ R. $U=\dfrac{6\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

Racionalizar las siguientes expresiones

1. $A=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{5}}$ R. $\dfrac{\sqrt[3]{25}}{10}$

2. $B = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x^5}}$ R. $\dfrac{\sqrt[6]{x^3}}{x}$

3. $C = \sqrt[4]{\dfrac{5x^3y}{9z^2}}$ R. $\dfrac{\sqrt[4]{45x^3yz^2}}{3z}$

4. $D = \sqrt{3x^2y}\left(\dfrac{\sqrt{2xy}}{\sqrt{8x^3y^5}}\right)$ R. $\dfrac{\sqrt{3x^2y}}{2xy^2}$

5. $E = \dfrac{ab}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ R. $\dfrac{ab\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}$

6. $F = \dfrac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ R. $\sqrt{x}+\sqrt{a}$

7. $G = \dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ R. $\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4$

8. $H = \dfrac{xy-1}{\sqrt[3]{x^2y^2}+\sqrt[3]{xy}+1}$ R. $\sqrt[3]{xy}-1$

9. $I = \dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$ R. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{y}$

10. $J = \dfrac{x}{\sqrt[3]{xy}-x}$ R. $\dfrac{\sqrt[3]{x^2y^2}+x\sqrt[3]{xy}+x^2}{y-x^2}$