CAPÍTULO 2

PRODUCTOS Y COCIENTES NOTABLES

2.1 PRODUCTOS NOTABLES

Las fórmulas que se exponen a continuación son el resultado de algunos de los productos algebraicos entre polinomios, que con mayor frecuencia se presentan en el cálculo algebraico y con los que el estudiante debe procurar familiarizarse por tanto es conveniente obtener y conocer su resultado de forma inmediata. Siendo los principales:

1. $\left(a+b\right)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $\left(a-b\right)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $\left(a-b\right)\left(a+b\right) = a^2 - b^2$
4. $\left(a+b\right)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. $\left(a-b\right)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6. $\left(x+a\right)\left(x+b\right) = x^2 + \left(a+b\right)x + ab$
7. $\left(ax+b\right)\left(cx+d\right) = acx^2 + \left(ad+bc\right)x + bd$
8. $\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right) = a^3 - b^3$
9. $\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right) = a^3 + b^3$
10. $\left(a+b+c\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Todos estos productos se pueden verificar realizando la correspondiente multiplicación de un polinomio por otro polinomio.

Ejemplo 1. Encuentre el polinomio de $\left(9a^3 + 7ab^5\right)^2$

Solución

$\left(9a^3\right)^2 + 2\left(9a^3\right)\left(7ab^5\right) + \left(7ab^5\right)^2$ por la 1era. fórmula

$81a^6 + 126ab + 49a^2b^{10}$ aplicando leyes exponenciales

Ejemplo 2. Encuentre el polinomio de $\left(x^{2n} + y^{2n}\right)\left(x^n + y^n\right)\left(x^n - y^n\right)$

Solución

$\left(x^{2n} + y^{2n}\right)\left[\left(x^n + y^n\right)\left(x^n - y^n\right)\right]$ agrupamos los últimos términos

$\left(x^{2n} + y^{2n}\right)\left(x^{2n} - y^{2n}\right)$ por la 3ra. fórmula

$x^{4n} - y^{4n}$ 3ra. fórmula.

Ejemplo 3. Encuentre el polinomio de $(x+1)^3(x-1)^3$

Solución

$[(x+1)\ (x-1)]^3$ por leyes exponenciales

$(x^2-1)^3$ usando la 3era. fórmula

$x^6-3x^4+3x^2-1$ desarrollando el cubo

Ejemplo 4. Hallar el polinomio de $(x-7)(x+8)$

Solución

$x^2+(-7+8)x+(-7)(8)$ aplicando la 6ta. fórmula

$15x^2+x-56$ simplificando

Ejemplo 5. Hallar el polinomio de $(3x+5)(4x-7)$

Solución

$(3)(4)x^2+[(3)(-7)+(5)(4)]x+(5)(-7)$ por la 7ma. fórmula

$12x^2-x-35$ simplificando

Ejemplo 6. Hallar el polinomio de $(x^2y-y^2)^3$

Solución

$(x^2y)^3-3(x^2y)^2(y^2)+3(x^2y)(y^2)^2-(y^2)^3$ aplicando la 5ta. fórmula

$x^6y^3-3x^4y^4+3x^2y^5-y^6$ usando leyes de exponentes

Ejemplo 7. Hallar el polinomio de $(2x+3y+z)^2$

Solución

$(2x)^2+(3y)^2+(z)^2+2(2x)(3y)+2(2x)(z)+2(3y)(z)$ por la décima fórmula

$4x^2+9y^2+z^2+12xy+4xz+6yz$ usando leyes de exponentes

Ejemplo 8. Hallar el polinomio de $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$

Solución

$[(x^2+1)+x][(x^2+1)-x](x^4-x^2+1)$ agrupando los dos primeros términos

$[(x^2+1)^2-x^2](x^4-x^2+1)$ aplicando la 3ra. fórmula

$(x^4+2x^2+1-x^2)(x^4-x^2+1)$ aplicando la primera fórmula en el primer factor

$(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$ sumando términos semejantes

$[(x^4+1)+x^2][(x^4+1)-x^2]$ agrupando de manera conveniente

$(x^4+1)^2-(x^2)^2$ por la 3ra fórmula

$x^8+2x^4+1-x^4$ desarrollando el primer factor

x^8+x^4+1 términos semejantes

Ejemplos combinados usando productos notables

Ejemplo 1. Simplificar $A=\dfrac{(a+b)(a^3-b^3)+(a-b)(a^3+b^3)}{a^4-b^4}$

Solución

$$A=\frac{(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)+(a-b)(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a^2)^2-(b^2)^2}$$

$$A=\frac{(a^2-b^2)(a^2+ab+b^2)+(a^2-b^2)(a^2-ab+b^2)}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}$$

$$A=\frac{(a^2-b^2)[a^2+ab+b^2+a^2-ab+b^2]}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}$$

$$A=\frac{[a^2+ab+b^2+a^2-ab+b^2]}{(a^2+b^2)}$$

$A=\dfrac{2a^2+2b^2}{(a^2+b^2)}$ entonces $A=\dfrac{2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)}$ por tanto $A=2$

Ejemplo 2. Simplificar $B=(a-3)(a-5)(a+2)(a+4)-(\underline{a^2-a}-13)^2+50$ siendo $a^2-a=x$

Solución

$$B=[(a-3)(a+2)][(a-5)(a+4)]-(x-13)^2+50$$

$$B=(\underline{a^2-a}-6)(\underline{a^2-a}-20)-(x-13)^2+50$$

$$B=(x-6)(x-20)-(x-13)^2+50$$

$B=x^2-26x+120-x^2+26x-169+50$ por tanto $B=1$

Triángulo de Pascal

El triángulo de Pascal indica los coeficientes de un binomio de la forma: $(a+b)^n$

$n=0$							1					
$n=1$						1		1				
$n=2$					1		2		1			
$n=3$				1		3		3		1		
$n=4$			1		4		6		4		1	
$n=5$		1		5		10		10		5		1
$n=6$	1		6		15		20		15		6		1

En los siguientes ejemplos desarrollar el binomio usando el triángulo de Pascal

Ejemplo 1. $(x+y)^4$

Solución

$$(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$

Ejemplo 2. $(2a+3b)^5$

Solución

$$(2a+3b)^5=(2a)^5+5(2a)^4(3b)+10(2a)^3(3b)^2-10(2a)^2(3b)^3+5(2a)(3b)^4-(3b)^5$$

$$=32a^5+240a^4b+720a^3b^2+1080a^2b^3+810ab^4+243b^5$$

Ejemplo 3. $\left(3ab-\frac{c}{2}\right)^6$

Solución

$$\left(3ab-\frac{c}{2}\right)^6=\left(3ab\right)^6-6\left(3ab\right)^5\frac{c}{2}+15\left(3ab\right)^4\left(\frac{c}{2}\right)^2-20\left(3ab\right)^3\left(\frac{c}{2}\right)^3+15\left(3ab\right)^2\left(\frac{c}{2}\right)^4-6\left(3ab\right)\left(\frac{c}{2}\right)^5+\left(\frac{c}{2}\right)^6$$

$$=729a^6b^6-729a^5b^5c+\frac{1215}{4}a^4b^4c^2-\frac{135}{2}a^3b^3c^3+\frac{135}{16}a^2b^2c^4-\frac{9}{16}abc^5+\frac{c^6}{64}$$

2.2 COCIENTES NOTABLES

Son ciertos cocientes que se escribe por simple inspección y están sujetas a reglas sin realizar la división. En forma general los cocientes notables son casos especiales de las divisiones exactas entre divisores binomicos de la forma: $\frac{x^n\pm y^n}{x\pm y}$ en los cuales es posible deducir el cociente sin necesidad de efectuar la operación donde *x, y* son las bases iguales; $n\in\mathrm{N}$, $n>2$.

Según la combinación de signo se puede analizar los siguientes casos

	Condición	División	Cocientes Notables
1.	Si $n\in\mathrm{N}$ par o impar	$\frac{x^n-y^n}{x-y}$	$=x^{n-1}+x^{n-2}y+...+xy^{n-2}+y^{n-1}$
2.	Si $n\in\mathrm{N}$ impar	$\frac{x^n+y^n}{x+y}$	$=x^{n-1}-x^{n-2}y+...-xy^{n-2}+y^{n-1}$
3.	Si $n\in\mathrm{N}$ par	$\frac{x^n-y^n}{x+y}$	$=x^{n-1}-x^{n-2}y+...+xy^{n-2}-y^{n-1}$

El exponente común *n* en la división indicada muestra el número de términos de la parte entera del cociente notable expandido.

Ejemplo 1. Hallar el polinomio del cociente $\frac{x^6-729}{x-3}$

Solución

$$\frac{x^6-3^6}{x-3}=x^5+3x^4+9x^3+27x^2+81x+243$$

Ejemplo 2. Hallar el polinomio del cociente $\frac{x^5-32}{x-2}$

Solución

$$\frac{x^5-2^5}{x-2}=x^4+2x^3+4x^2+8x^2+16$$

Ejemplo 3. Hallar el polinomio del cociente $\frac{x^4-y^4}{x+y}$

Solución

$$\frac{x^4-y^4}{x+y}=x^3-x^2y+xy^2-y^3$$

Cualquier término del desarrollo de un cociente notable se puede encontrar usando la fórmula cualquiera *k*, de la parte entera del cociente, se calcula mediante la fórmula:

$$T_k=\left(\text{signo}\right)x^{n-k}a^{k-1}\ \text{ con } k\in\mathrm{N}\text{, y } 1\le k\le n\ \text{ donde}$$

x = primer término del divisor
a = segundo término del divisor
n = número de términos del cociente notable
k = lugar que ocupa el término

El término general del cociente notable en una división cualquiera verifica la condición de proporcionalidad, es decir:

$$\frac{x^m \pm a^n}{x^p \pm a^q} \text{ cumple: } \frac{m}{p} = \frac{n}{q} = r \text{ términos}$$

Luego cualquier término se obtiene a partir de la fórmula:

$$T_k = (\text{signo}) \left(x^p\right)^{n-k} \left(a^q\right)^{k-1} \text{ con } 1 \le k \le r$$

Ejemplo 1. Hallar el valor de k donde $\dfrac{x^{3k+2} - a^{5k-1}}{x^2 - a^3}$

Solución

$$\frac{\left(x^2\right)^{\frac{3k+2}{2}} - \left(a^3\right)^{\frac{5k-1}{3}}}{\left(x^2\right) - \left(a^3\right)} \text{ igualando las bases de los términos}$$

$$\frac{3k+2}{2} = \frac{5k-1}{3} \text{ usando la condición de proporcionalidad}$$

$$k = 8$$

Ejemplo 2. Hallar el cuarto término del cociente $\dfrac{(x+1)^6 - 1}{x}$

Solución

$$\frac{(x+1)^6 - 1}{(x+1) - 1} \text{ igualando bases}$$

$$\frac{(x+1)^6 - 1}{(x+1) - 1} = (x+1)^5 + (x+1)^4 + (x+1)^3 + (x+1)^2 + (x+1) + 1 \text{ desarrollando}$$

$$(x+1)^2 \text{ identificando el cuarto término}$$

Usando la fórmula se tiene: donde $n = 6$ y $k = 4$

$$T_4 = (x+1)^{6-4}\, 1^{4-1} \text{ por tanto } T_4 = (x+1)^2$$

Ejemplo 3. Hallar el desarrollo del siguiente cociente notable $\dfrac{(x+2)^3 - 1}{x+1}$

Solución

$$\frac{(x+2)^3 - 1}{(x+2) - 1} \text{ igualando bases}$$

$$\frac{(x+2)^3 - 1}{(x+2) - 1} = (x+2)^2 + (x+2) + 1 = x^2 + 5x + 7$$

Ejemplo 4. Cuantos términos tiene el cociente notable: $\dfrac{x^{a+8} + y^{a^2-91}}{x^2 + y}$

Solución

$$\frac{\left(x^2\right)^{\frac{a+8}{2}} + (y)^{a^2-91}}{x^2 + y} \text{ igualando bases}$$

$\frac{a+8}{2} = a^2 - 91$ propiedad de proporcionalidad

$a + 8 = 2a^2 - 182$ multiplicando por 2

$2a^2 - a - 190 = 0$ sumando términos semejantes

$(a-10)(2a+19) = 0$ por aspa

$a = 10$ luego el número de términos es $\frac{a+8}{2} = \frac{10+8}{2} = 9$

2.3 EJERCICIOS PROPUESTOS

I. Hallar los polinomios usando productos notables

1. $\left(\frac{2}{7}a^2b^3 + \frac{3}{5}x^2y^3\right)^2$ R. $\frac{4}{49}a^4b^6 + \frac{12}{35}a^2b^3x^2y^3 + \frac{9}{25}x^4y^6$

2. $\left(x^2y - 2z\right)^2$ R. $x^4y^2 - 4x^2yz + 4z^2$

3. $\left(x - 2y + z\right)^2$ R. $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy + 2xz - 4yz$

4. $\left(1 - 5x^3\right)\left(1 + 5x^3\right)$ R. $1 - 25x^6$

5. $\left(5xy - 4\right)\left(5xy + 4\right)$ R. $25x^2y^2 - 16$

6. $\left(r + s + 1\right)\left(r + s - 1\right)$ R. $r^2 + 2rs + s^2 - 1$

7. $\left(3x + 2y\right)^2\left(3x - 2y\right)^2$ R. $81x^4 - 72x^2y^2 + 16y^4$

8. $\left(x^2 + 2x + 1\right)^2\left(x^2 - 2x + 1\right)^2$ R. $x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1$

9. $\left(\frac{2}{3}ut + \frac{4}{5}w\right)\left(\frac{2}{3}ut - \frac{4}{5}w\right)$ R. $\frac{4}{9}t^2u^2 - \frac{16}{25}w^2$

10. $\left(ab^2 - 2b\right)^3$ R. $a^3b^6 - 6a^2b^5 + 12ab^4 - 8b^3$

11. $\left(\frac{5}{2}x - 3y\right)^3$ R. $\frac{125}{8}x^3 - \frac{225}{4}x^2y + \frac{135}{2}xy^2 - 27y^3$

12. $\left(10x^2 + 5y^n\right)^3$ R. $1000x^6 + 1500x^4y^n + 750x^2y^{2n} + 125y^{3n}$

13. $\left(xy + 6\right)\left(xy - 4\right)$ R. $x^2y^2 + 2xy - 24$

14. $\left(2t^2 + s\right)\left(3t^2 + 4s\right)$ R. $4s^2 + 11st^2 + 6t^4$

15. $x(2x - 3)(3x + 4)$ R. $6x^3 - x^2 - 12x$

16. $\left(5x + 3y\right)\left(2x - 3y\right)$ R. $10x^2 - 9xy - 9y^2$

17. $\left(y + 3\right)\left(y - 5\right)$ R. $y^2 - 2y - 15$

18. $\left(t^2+10\right)\left(t^2-12\right)$ R. t^4-2t^2-120

19. $\left(x^2+4y\right)\left(2x^2y-y^2\right)$ R. $2x^4y+7x^2y^2-4y^3$

20. $\left(t-2\right)\left(t^2+2t+4\right)$ R. t^3-8

21. $\left(z-x\right)(z^2+xz+x^2)$ R. z^3-x^3

22. $\left(a-b+c\right)\left(a+b+c\right)$ R. $a^2+2ac-b^2+c^2$

23. $\left(x+y+z\right)\left(x+y-z\right)\left(x-y+z\right)\left(x-y-z\right)$ R. $x^4-2x^2y^2-2x^2z^2+y^4-2y^2z^2+z^4$

24. $\left(3x-5y-3z\right)\left(3x+5y+3z\right)$ R. $9x^2-25y^2-30yz-9z^2$

25. $\left(2x+5z\right)\left(4x^2-10xz+25z^2\right)$ R. $8x^3+125z^3$

26. $\left(\frac{3}{5}x^2y-\frac{2}{3}z^n\right)^4$ 27. $\left(3a^2b+\frac{5}{7}a\right)^5$ 28. $\left(\frac{1}{2x}-\frac{y}{3}\right)^7$ 29. $\left(7x^2+3y^3\right)^6$ 30. $\left(xy-\frac{z}{2}\right)^8$

II. Usando cocientes notables resolver las siguientes divisiones

1. $\dfrac{25x^2-16y^2}{5x+4y}$ R. $5x-4y$

2. $\dfrac{\frac{9}{4}a^6-49b^2}{\frac{3}{2}a^3-7b}$ R. $\dfrac{3}{2}a^3+7b$

3. $\dfrac{5-z^3}{\sqrt[3]{5}-z}$ R. $\sqrt[3]{25}+z\sqrt[3]{5}+z^2$

4. $\dfrac{100x^3+8y^3}{\sqrt[3]{100}x+2y}$ R. $\sqrt[3]{10000}x^2-2\sqrt[3]{100}xy+4y^2$

5. $\dfrac{729x^{12}-z^6y^{18}}{3x^2+zy^3}$ R. $243x^{10}-81x^8y^3z+27x^6y^6z^2-9x^4y^9z^3+3x^2y^{12}z^4-y^{15}z^5$

III. Hallar el término indicado de los siguientes cocientes

1. $\dfrac{x^{6n}-y^{40}}{x^{n-4}-y^4}$ el octavo término R. $x^{12}y^{28}$

2. $\dfrac{x^7-128}{x-2}$ el tercer término R. $4x^4$

3. $\dfrac{x^{36}-a^{24}}{x^3+a^2}$ el séptimo término R. $x^{15}a^{12}$

4. $\dfrac{x^{n+4}-y^{2n+1}}{x-y}$ el número de términos R. 7

5. $\dfrac{x^{6n+3}+a^{6n-22}}{\sqrt{x^{n-6}}+\sqrt{a^{n-8}}}$ hallar n, el número de términos y el término 19 R. $n=12$, 25 términos, $x^{18}a^{36}$

6. Sabiendo que $t_5=a^{176}b^{64}$ del cociente $\dfrac{a^{4^x}-b^{4^x}}{a^{5^y-9}-b^{5^y-9}}$ calcular el número de términos R. 16

7. Hallar $m+n$ si $t_{25} = x^{270}a^{288}$ del cociente $\dfrac{x^{129m} - a^{86n}}{x^{3m} - a^{2n}}$ R. $m + n = 11$

8. Sabiendo uno de los términos del cociente $\dfrac{x^a + y^b}{x + y^2}$ es $-x^4y^{10}$ calcular $\left(\dfrac{b}{a}\right)$ R. $\dfrac{b}{a} = 2$