CAPÍTULO 8

TRIGONOMETRÍA

Esta rama de la Geometría se ocupa de la medida de los elementos de los triángulos. La trigonometría proviene del griego trí=tres, gonon=ángulo y metria=medida, nos ayuda a resolver problemas relacionando y haciendo cálculos con las medidas de los lados y los ángulos de un triángulo.

Es una rama de la matemática que estudia las propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas o circulares, se clasifican en trigonometría plana y esférica, estudia la resolución de triángulos planos y esféricos.

En este curso se tratará únicamente la trigonometría plana.

8.1 ANGULOS

Definición..- Un ángulo es el conjunto de puntos determinado por dos segmentos de rectas l_1 y l_2 cuyo origen es común. Ambos segmentos que forman un ángulo se llaman lados en tanto que el extremo u origen se conoce como vértice, los ángulos se denotan con letras griegas como son: α, β, θ, y las ultimas letras del abecedario x, y, z etc.

Los ángulos pueden tener sentido positivo o negativo según sea su recorrido; si es contrario al de las agujas del reloj será positivo y si es igual es negativo.

a) *Sistema de medición de ángulos*

Las dos unidades usadas comúnmente para medir un ángulo son: el grado y el radián.

- Medida de un ángulo en grados

Un ángulo en posición normal, que se obtiene con una revolución (rotación) completa en sentido contrario a las manecillas del reloj, mide 360 grados, lo cual escribimos así: $360°$. Un ángulo generado por $\frac{1}{360}$ de una rotación completa mide un grado $\left(1°\right)$ es decir: divida la circunferencia en 360 partes iguales, donde cada parte es un grado, a su vez cada grado se compone de 60 minutos y cada minuto de 60 segundos, así el ángulo se mide en: grados, minutos y segundos.

Ciertos ángulos reciben nombres especiales tales como:

Terminología	Definición
ángulo recto θ	$\theta = 90°$ (cuarta rotación)
ángulo llano θ	$\theta = 180°$ (media rotación)
ángulo agudo θ	$0° < \theta < 90°$
ángulo obtuso θ	$90° < \theta < 180°$
ángulos complementarios α y β	$\alpha + \beta = 90°$
ángulos suplementarios α y β	$\alpha + \beta = 180°$

- Medida de un ángulo en radianes

La medida en radianes (rad) de un ángulo central se define como la razón de la longitud del arco con la longitud del radio es decir, sea θ el ángulo central de una circunferencia de radio $r > 0$ y la longitud del arco subtendido en la circunferencia es s la medida en radianes de θ estará dada por $\theta = \frac{s}{r}$. Como $s = r$ entonces se concluye que 1 revolución $= 2\pi\ rad$

- Conversión de grados a radianes o viceversa

Para realizar el cambio de sistemas se utiliza la siguiente relación

$$\frac{\text{ángulo en grados}}{360^\circ} = \frac{\text{ángulo en radianes}}{2\pi\ rad}$$

Relaciones entre grados y radianes

$$1.\ 180^\circ = \pi \text{ rad} \quad 2.\ 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \quad 3.\ 1 \text{ rad} = \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)$$

Ejemplo 1. Convertir de radianes a grados

$$1.\ 0.6\ rad = 0.6\left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) = \frac{108}{\pi} \text{ grados} \simeq 34.4^\circ$$

$$2.\ \frac{4\pi}{3}\ rad = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) = 240^\circ$$

$$3.\ 5\ rad = 5\left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) = \frac{900}{\pi} \text{ grados} \simeq 286.5^\circ$$

Ejemplos 2. Convertir de grados a radianes

$$1.\ 150^\circ = 150\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{5\pi}{6}\ rad$$

$$2.\ 345^\circ = 345\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{23\pi}{12}\ rad$$

$$3.\ 7^\circ = 7\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{7\pi}{180}\ rad$$

8.2 FUNCIONES O RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

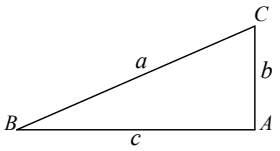
Para entender lo que se conoce como funciones trigonométricas y lo que significan, se necesitan relacionar o poner en correspondencia el valor del ángulo en posición normal a ciertas razones que involucran las coordenadas del cualquier punto en un sistema de coordenadas cartesianas.

Existen tres enfoques para el estudio y la aplicación de dichas funciones

a) *Funciones trigonométricas de un triángulo rectángulo*

Son relaciones que existen entre los lados de un triángulo rectángulo con respecto a uno de sus ángulos agudos.

Consideremos un triángulo rectángulo cuyos ángulos son: *A, B, C* y sus lados son: *a, b* y *c*.



En relación a uno de los ángulos del triángulo rectángulo, se pueden definir las funciones o razones trigonométricas, por ejemplo, para el ángulo *B* se tiene:

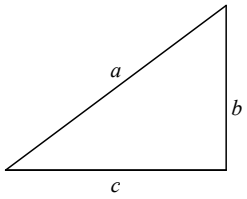
$$1.\ senB = \frac{b}{a} \qquad 2.\ \cos B = \frac{c}{a} \qquad 3.\ tgB = \frac{b}{c}$$

$$4.\ \sec B = \frac{a}{b} \qquad 5.\ \csc B = \frac{a}{b} \qquad 6.\ ctgB = \frac{c}{b}$$

El seno, coseno y la tangente son funciones o razones trigonométricas directas, mientras que la cotangente, secante y cosecante son funciones recíprocas entre sí. Además, el producto de dos funciones recíprocas siempre es uno, es decir:

$$1.\ senB.\csc B = 1 \quad 2.\ \cos B.\sec B = 1 \quad 3.\ tgB.ctgB = 1$$

Teorema 1.- El teorema de Pitágoras relaciona los tres lados del triángulo rectángulo y dice: la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos $a^2 = b^2 + c^2$



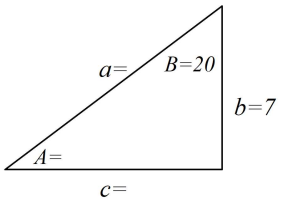
Ejemplo 1. Dado el triángulo rectángulo hallar todos los elementos

Solución

$B = 20$, $C = 90$ y $b = 7$ datos conocidos por la grafica

$\cos 20 = \dfrac{7}{a}$ usando la relación coseno

$a = \dfrac{7}{\cos 20} \Rightarrow a = 7.45$



$tg20 = \dfrac{c}{7}$ usando la relación tangente

$c = 7tg20 \Rightarrow c = 2.54$

$A + B + C = 180$ relación conocida

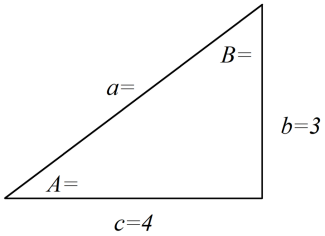
$A = 180 - 90 - 20$ luego $A = 70$ ángulo buscado

Ejemplo 2. Dado triángulo hallar todos los elementos

Solución

$b = 3$ y $c = 4$ datos conocidos por la grafica

$tgA = \dfrac{3}{4}$ usando la relación tangente



$A = arctg\dfrac{3}{4} \Rightarrow A = 36°52'11.62''$

$tgB = \dfrac{4}{3}$ usando la relación tangente

$B = arctg\dfrac{4}{3} \Rightarrow B = 53°7'48.37''$

$a = \sqrt{3^2 + 4^2}$ por Pitágoras luego $a = 5$

Ejemplo 3. Sabiendo que la $tgx = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ hallar $A = \dfrac{1 + \sqrt{2}\cos x}{senx}$

Solución

$\sqrt{2}$ y 1 son los lados del triángulo por la relación de la $tgx = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$h = \sqrt{1^2 + \sqrt{2^2}}$ por Pitágoras calculamos la hipotenusa $h = \sqrt{3}$

$\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ usando la relación coseno

$senx = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ calculando la función seno

$A = \dfrac{1+\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$ sustituyendo las relaciones seno y coseno

$A = \dfrac{\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$ simplificando

$A = \sqrt{3}+2$ valor buscado

Ejemplo 4. Sabiendo que $seny = \dfrac{a-b}{a+b}$, hallar $\cos y$, tgy

Solución

$a-b$ y $a+b$ son los lados del triángulo

$x = \sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2}$ usando Pitágoras para hallar el lado del triangulo

$x = \sqrt{a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2}$ productos notables

$x = 2\sqrt{ab}$ simplificando

$\cos y = \dfrac{x}{a+b} \Rightarrow \cos y = \dfrac{2\sqrt{ab}}{a+b}$ calculando el coseno

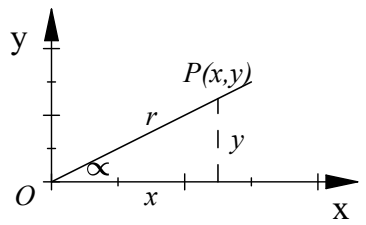
$tgy = \dfrac{a-b}{x} \Rightarrow tgy = \dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}} = \dfrac{(a-b)\sqrt{ab}}{2ab}$ calculando la tangente

b) *Funciones trigonométricas de cualquier ángulo en el plano cartesiano*

Un ángulo está en posición normal si:

- Su vértice está en el origen de coordenadas.
- Su lado inicial coincide con el semieje positivo *x*.

Consideremos un sistema de ejes coordenados



$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

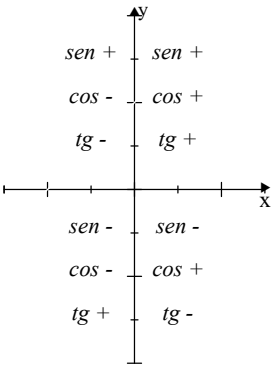
$r =$ Radio vector (hipotenusa)

$y =$ Ordenada (cateto opuesto de α)

$x =$ Abscisa (cateto adyacente de α)

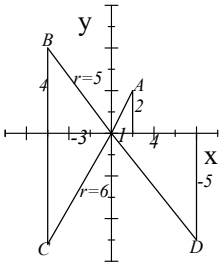
1. $sen\alpha = \dfrac{y}{r}$ 2. $\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$ 3. $tg\alpha = \dfrac{y}{x}$

Los signos de las funciones trigonométricas, dependen únicamente de *x* e *y,* el radio vector *r* siempre es positiva.



Ejemplo 1. Hallar el radio vector para cada uno de los puntos $A(1,2)$; $B(-3,4)$, $C(-3,3\sqrt{3})$, $D(4,-5)$

Solución



$$r_A = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

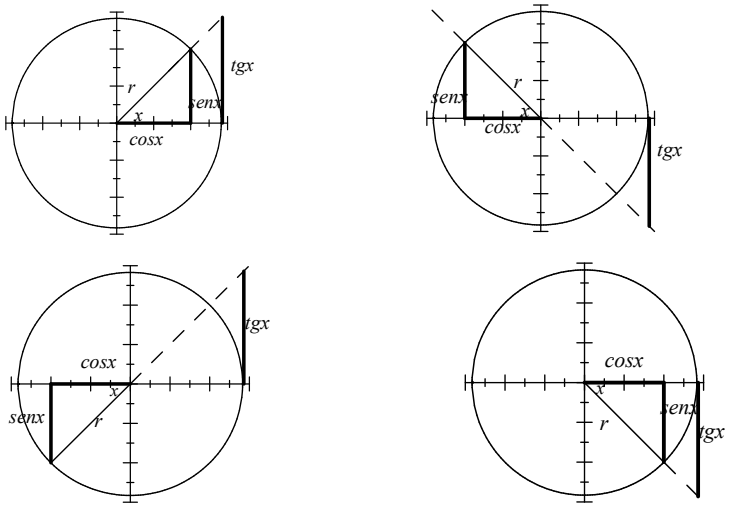
$$r_B = \sqrt{9+16} = 5$$

$$r_C = \sqrt{9+27} = 6$$

$$r_D = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$$

c) *Funciones trigonométricas en la circunferencia trigonométrica*

El círculo trigonométrico o circunferencia unitaria consideremos un triángulo rectángulo inscrito de radio 1 y centro en el origen.



Ejmeplo1. Dado la $tgx = -\dfrac{5}{2}$ en el 2do. cuadrante, hallar el valor de las demás funciones.

Solución

$r = \sqrt{5^2 + 2^2}$ por Pitágoras

$r = \sqrt{29}$

1. $senx = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$ 2. $\cos x = -\dfrac{2}{\sqrt{29}}$ 3. $tgx = -\dfrac{5}{2}$

4. $\csc x = \dfrac{\sqrt{29}}{5}$ 5. $\sec x = -\dfrac{\sqrt{29}}{2}$ 6. $ctgx = -\dfrac{2}{5}$

Ejemplo 2. Dado la $\cos x = \frac{4}{11}$ en el 3er. cuadrante, hallar el valor de las demás funciones.

Solución

$b = \sqrt{11^2 - 2^2}$ por Pitágoras

$b = \sqrt{105}$

1. $senx = -\frac{105}{11}$ 2. $\cos x = -\frac{4}{11}$ 3. $tgx = \frac{\sqrt{105}}{4}$

4. $\csc x = -\frac{11}{105}$ 5. $\sec x = -\frac{11}{4}$ 6. $ctgx = \frac{4}{\sqrt{105}}$

8.3 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Existen tres Teoremas que nos permiten resolver triángulos oblicuángulos

Teorema de senos. - En todo triángulo los lados son directamente proporcionales a los senos de los ángulos opuestos. Este Teorema se utiliza cuando se conoce un ángulo y su lado opuesto.

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

Teorema de cosenos. - En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual a las sumas de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de estos lados, por el coseno del ángulo que forman. Este Teorema se aplica si se conocen dos lados y el ángulo comprendido.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ac\cos C$$

$A + B + C = 180$ suma de los ángulos

Teorema de tangentes. - En todo triángulo la suma de dos lados es a su diferencia, como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos a estos lados es a la tangente de la semidiferencia de estos ángulos. Este teorema se utiliza ocasionalmente.

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\left(\frac{A+B}{2}\right)}{tg\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

Directrices para resolver triángulos oblicuángulos

1. Tome en cuenta los datos que proporciona el ejercicio
2. De acuerdo a los datos decida el teorema a utilizar realizando los despejes correspondientes de fórmula para encontrar todos los componentes del triángulo oblicuángulo.
3. Realice las operaciones correspondientes para hallar los ángulos

Ejemplo 1. Resolver el triángulo oblicuángulo conocido los lados: $a = 12$, $b = 6$, $c = 9$

Solución

$a = 12$, $b = 6$, $c = 9$ datos conocidos

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ aplicando la ley de cosenos

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ despejando coseno

$\cos A = \dfrac{6^2 + 9^2 - 12^2}{2(6)(9)}$ sustituyendo los datos conocidos

$A = \arccos\left(-\frac{27}{8}\right) \quad \Rightarrow A = 104°28'39''$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ despejando coseno

$\cos B = \dfrac{12^2 + 9^2 - 6^2}{2(12)(9)}$ sustituyendo los datos conocidos

$B = \arccos\left(\frac{189}{216}\right) \Rightarrow B = 28°57'18''$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ despejando el coseno

$\cos C = \dfrac{12^2 + 6^2 - 9^2}{2(12)(6)}$ sustituyendo los lados del triangulo

$C = \arccos\left(\frac{99}{144}\right) \quad \Rightarrow C = 46°34'3''$

Ejemplo 2. Resolver el triángulo oblicuángulo cuyos ángulos son: $A = 75°$, $B = 40°$, $c = 6$

Solución

$A = 75°$, $B = 40°$, $c = 6$ datos conocidos

$A + B + C = 180$ por suma de ángulos

$C = 180 - 75° - 40° \Rightarrow C = 65°$

$\dfrac{a}{senA} = \dfrac{c}{senC}$ aplicando la ley de los senos

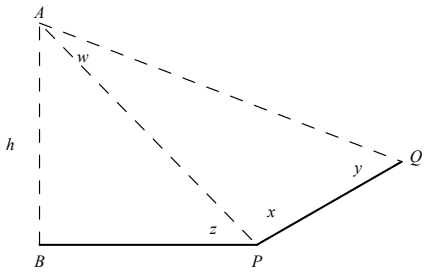
$a = \dfrac{csenA}{senC}$ sustituyendo $a = \dfrac{6sen75°}{sen65°} \Rightarrow a = 6.39$

$\dfrac{b}{senB} = \dfrac{c}{senC}$ aplicando la ley de los senos

$b = \dfrac{csenB}{senC}$ sustituyendo $b = \dfrac{6sen40°}{sen65°} \Rightarrow b = 4.25$

Ejemplo 3. Para medir la altura $AB = h$ de una montaña se determina la base $PQ = 400m$ y con la ayuda de un teodolito, en *P* y *Q* se miden los ángulos $x = 65°$, $y = 75°$ y $z = 57°$ como indica el gráfico ¿Cuál es la altura de la montaña?

Solución



En el triángulo *APQ* tenemos: $w = 180° - 65° - 75° = 40°$

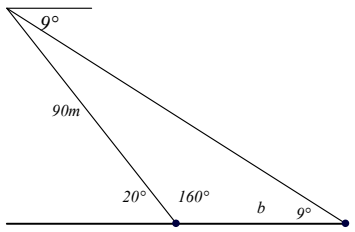
$\dfrac{AP}{seny} = \dfrac{PQ}{senw}$ entonces $AP = \dfrac{PQseny}{senw}$

$AP = \dfrac{400sen75°}{sen40°}$ entonces $AP = 601$

$h = APsenz = 601sen57° = 504m$ la altura de la montaña.

Ejemplo 4. Un hombre camina $90m$ desde la orilla de un rio sobre una pendiente de $20°$, se detiene y observa una piedra en la orilla opuesta y determina que el ángulo de depresión de la piedra es $9°$ Calcular el ancho del rio

Solución



$$\frac{b}{sen11°} = \frac{90m}{sen9°}$$

$$b = \frac{90msen11°}{sen9°} \Rightarrow b = 109.77m \text{ ancho del rio}$$

8.4 IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

Definición. - Una identidad trigonométrica es una igualdad que cumple para todos los valores del ángulo para los cuales están definidas dichas funciones.

La demostración o verificación una identidad trigonométrica consiste en probar que uno de sus miembros se puede escribir en forma idéntica al otro.

Directrices para resolver una identidad trigonométrica

1. Se comienza con el miembro más complicado de la identidad para transformarlo en lo más simple.
2. Realizamos operaciones algebraicas y sustituciones de identidades básicas
3. Si fallan los otros pasos puede operar en forma independiente los dos miembros
4. En cada paso se toma en cuenta al otro miembro de la identidad, con frecuencia lo anterior sugiere lo que hay que hacer para llegar a él.

Tipos de simplificación.

a) *Simplificación o reducciones*

Dada una expresión, se reduce a su mínima expresión en forma directa usando las identidades fundamentales o en forma indirecta, expresándola en términos de senos o cosenos

Ejemplo 1. Simplificar la siguiente expresión $E = senx.\cos x.ctgx + \frac{senx}{\csc x}$

Solución

$senx.\cos x.\frac{\cos x}{senx} + \frac{senx}{\frac{1}{senx}}$ sustituyendo por su identidad

$\frac{senx.\cos x.\cos x}{senx} + sen^2x$ simplificando el factor común

$\cos^2 x + sen^2x$ simplificando

$E = 1$ sustituyendo por su identidad

b) *Problemas con una condición*

En este tipo de problemas, la expresión que se pide calcular depende de la condición. Por lo tanto, se recomienda poner a la expresión que se pide calcular en función de la condición o viceversa.

Ejemplo 1. Hallar el valor de A si: $\dfrac{\cos x}{1+senx}+\dfrac{\cos x}{1-senx}=\dfrac{2}{A}$

Solución

$$\cos x\left(\frac{1}{1+senx}+\frac{1}{1-senx}\right)=\frac{2}{A}$$ factorizando coseno

$$\cos x\left(\frac{\left(1-senx\right)+\left(1+senx\right)}{\left(1+senx\right)\left(1-senx\right)}\right)=\frac{2}{A}$$ hallando el mcm

$$\cos x\left(\frac{1-senx+1+senx}{\left(1-sen^2x\right)}\right)=\frac{2}{A}$$ simplificando términos en común

$$\frac{2\cos x}{\cos^2 x}=\frac{2}{A}$$ despajando el valor de A

$$A=\cos x$$ valor buscado

c) *Demostración de identidades*

Identidades fundamentales llamadas también relaciones o fórmulas fundamentales:

Pitagóricas

$$sen^2x+\cos^2 x=1 \qquad 1+tag^2x=\sec^2 x \qquad 1+ctg^2x=\csc^2 x$$

Reciprocas

$$senx=\frac{1}{\csc x} \qquad \cos x=\frac{1}{\sec x} \qquad tgx=\frac{1}{ctgx}$$

Funciones trigonométricas de ángulo doble

$$sen2x=2senx.\cos x \qquad \cos 2x=\cos^2 x-sen^2x \qquad tg2x=\frac{2tgx}{1-tg^2x}$$

Funciones trigonométricas de mitad ángulo

$$sen\,\tfrac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad \cos\tfrac{x}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \qquad tg\,\tfrac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

Funciones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos

$$sen(x\pm y)=senx.\cos y\pm seny.\cos x \qquad \cos(x\pm y)=\cos x.\cos y-senx.seny \qquad tg(x\pm y)=\frac{tgx\pm tgy}{1-tgx\ tgy}$$

Ejemplo 1. Demostrar la identidad $tgx+ctgx=\sec x.\csc x$

Solución

$$\frac{senx}{\cos x}+\frac{\cos x}{senx}$$ expresando sus equivalencias en el 1er. miembro

$$\frac{sen^2x+\cos^2 x}{\cos x.senx}$$ hallando el mcm

$$\frac{sen^2x+\cos^2 x}{\cos x.senx}$$ por la pitagórica

$$\frac{1}{\cos x.senx}=\sec x.\csc x$$

Ejemplo 2. Demostrar la identidad $\cos^2 x + (ctgx.\cos x)^2 = ctg^2 x$

Solución

$\cos^2 x + ctg^2 x.\cos^2 x$ partimos del 1er. miembro

$\cos^2 x\left(1 + ctg^2 x\right)$ factor común

$\cos^2 x.\csc^2 x$ formula pitagórica

$\left(\frac{\cos x}{senx}\right)^2$ su reciproca de la cosecante

$ctg^2 x$ demostrado

Ejemplo 3. Demostrar la identidad $\cos^6 x + sen^6 x = 1 - 3sen^2 x.\cos^2 x$

Solución

$\left(\cos^2 x\right)^3 + \left(sen^2 x\right)^3$ aplicando potenciación

$\left(\cos^2 x + sen^2 x\right)\left[\left(\cos^2 x\right)^2 - \cos^2 x.sen^2 x + \left(sen^2 x\right)^2\right]$ diferencia de cubos

$\left(1 - sen^2 x\right)^2 - \cos^2 x.sen^2 x + sen^4 x$ sustituyendo por su equivalencia

$1 - 2sen^2 x + sen^4 x - \cos^2 x.sen^2 x + sen^4 x$ desarrollando el cuadrado de un binomio

$1 - 2sen^2 x + 2sen^4 x - \left(1 - sen^2 x\right).sen^2 x$ factor común

$1 - 2sen^2 x + 2sen^4 x - sen^2 x + sen^4 x$ simplificando

$1 - \left(3sen^2 x + 3sen^4 x\right)$ agrupando

$1 - 3sen^2 x\left(1 - sen^2 x\right)$ factor común

$1 - 3sen^2 x.\cos^2 x$ demostrado

8.5 ECUACIONES TRIGONOMETRICAS

Definición. - Una ecuación trigonométrica es aquella donde la incógnita aparece como ángulo de funciones trigonométricas como las incógnitas son ángulos, las soluciones que existan serán infinitas (todos los ángulos mayores de 360º con el que hallemos), pero normalmente nos bastará con dar la solución comprendida entre 0º y 360º. También puede darse la solución en radianes.

Directrices para resolver ecuaciones trigonométricas

1. Aunque no existe un método general para resolver una ecuación trigonométrica, generalmente se procede transformando toda la ecuación de manera que quede expresada como una sola función trigonométrica
2. Se resuelve como una ecuación algebraica cualquiera.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación trigonométrica $senx - \frac{1}{2} = 0$ en el intervalo $0° < x < 360°$

Solución

$x = arcsen\left(\frac{1}{2}\right)$ aislando la variable

$x = 30°; \quad 150°$

En grados	$30°$	$150°$
En radianes	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$

soluciones de la ecuación

Ejemplo 2. Resolver la ecuación trigonométrica $tg^2x + 3 = 2\sec^2 x$ en el intervalo $0° < x < 360°$

Solución

$\frac{sen^2x}{\cos^2 x} + 3 = 2\frac{1}{\cos^2 x}$ sustituyendo por su equivalencia las funciones

$sen^2x + 3\cos^2 x = 2$ hallando el mcm

$sen^2x + 3(1 - sen^2x) = 2$ sustituyendo por su equivalencia el coseno

$sen^2x + 3 - 3sen^2x = 2$ multiplicando el factor

$-2sen^2x = -1$ sumando términos semejantes

$senx = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = 45°;\ 315°$

En grados	$45°$	$315°$
En radianes	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$

soluciones de la ecuación

8.6 EJERCICOIS PROPUESTOS

Convertir los ángulos de grados a radianes

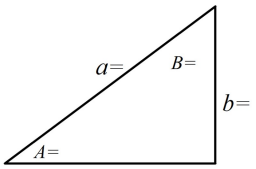
1. $60°$ R. $0,740rad$ 2. $270°$ R. $\frac{3\pi}{2}rad$ 3. $125°30'20''$ R. $2.19rad$

Convertir los ángulos de radianes a grados

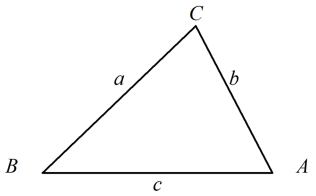
1. $\frac{\pi}{4}rad$ R. $45°$ 2. $3\pi rad$ R. $540°$ 3. $0.5rad$ R. $28°38'52.4''$

Resolver el siguiente triángulo rectángulo conocido:

1. $c = 5$ y $B = 45°$
2. $c = 6$ y $b = 8$
3. $a = 8$ y $A = 25°$
4. $a = \sqrt{7}x$ y $b = 2x$



Resolver los triángulos oblicuángulos



1. $B = 41°$, $A = 77°$ y $c = 100$
2. $B = 33°$, $a = 40$ y $b = 30$
3. $B = 26°$, $a = 18$ y $b = 10$
4. $A = 31°40'$, $b = 12$ y $a = 8$
5. $a = 100$, $c = 99$ y $b = 2$

6. Si $senA = \frac{3}{5}$ y A esta en el primer cuadrante hallar: a) $senA \times tgA$ b) $\frac{senA + tgA}{2}$

7. Si $\cos B = \frac{4}{5}$ y B está en el tercer cuadrante hallar: a) $\cos^2 B\frac{\sec B}{ctgB}$ b) $\frac{1 + senB}{\sec B} + \frac{tgB}{1 - \sec B}$

8. Si $ctgx = \frac{a}{b}$ y x está en el primer cuadrante hallar: $\frac{a\cos x - bsenx}{a\cos x + bsenx}$

Demostrar las siguientes identidades

1. $\dfrac{tgx}{1-ctgx}+\dfrac{ctgx}{1-tgx}=1+tgx+ctgx$

2. $sen3x=3senx-4sen^3$

3. $(tgx-senx)^2+(1-\cos x)^2=(\sec x-1)^2$

4. $\dfrac{senx}{\csc x}+\dfrac{\cos x}{\sec x}=1$

5. $tgx+\csc x.\sec x(2\cos^2 x-1)=ctgx$

6. $\dfrac{\sec x}{tgx+ctgx}=senx$

7. $\dfrac{tgx}{1+\sec x}-\dfrac{tgx}{1-\sec x}=\dfrac{2}{senx}$

8. $\dfrac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}}=senx$

9. $\dfrac{\left(\sec x-tgx\right)^2-1}{\left(\sec x+tgx\right)^2-1}=\dfrac{1-\csc x}{1+\csc x}$

10. $tgx-\sec x=\dfrac{\cos x}{1-senx}$

11. $\dfrac{\left(\cos x+tgx.senx\right)^2-1}{sen^2x}=\sec^2 x$

12. $\dfrac{tgx}{1-tgx}+\dfrac{ctgx}{1-ctgx}=-1$

13. $\dfrac{tgx-senx}{sen^3x}=\dfrac{\sec x}{1+\cos x}$

14. $ctgx+\dfrac{senx.tgx}{senx+tgx}=\dfrac{1}{senx}$

15. $\dfrac{\sec^3 x-\sec x+tgx}{\sec x}=tg^2x+senx$

Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas

1. $sen^2x-\cos^2 x=\dfrac{1}{2}$ 2. $senx+\sqrt{3}\cos x=2$ 3. $sen2x=\cos 60^o$

4. $senx=1$ 5. $senx=\dfrac{1}{2}$ 6. $sen2x.\cos x=6sen^3x$

7. Hallar el valor de b , para que la igualdad se cumpla

$$\frac{2senx.\cos x}{senx+\cos x+1}=senx+\cos x+b$$

8. Calcule el valor de E , considerando que $x=\dfrac{3\pi}{8}$

$$E=\frac{senx-2sen^3x}{\sec x}$$

9. Hallar el valor de $E3\left(1+senx+\cos x\right)^2=E\left(1+senx\right)1+\cos x$