CAPÍTULO 6

ECUACIONES

Definición. - Las ecuaciones son expresiones algebraicas formadas por dos miembros separados de una igualdad (=). Uno o ambos de éstas partes debe tener por lo menos una variable conocida como incógnita. Las ecuaciones se satisfacen solo para determinados valores de la o las incógnitas, los cuales son conocidos como soluciones o raíces de la ecuación.

$$\underbrace{\text{Expresión Algebraica}}_{\text{1er. miembro}} = \underbrace{\text{Expresión Algebraica}}_{\text{2do. miembro}}$$

Los siguientes enunciados son ecuaciones

$x^2 + y^2 = r^2$ ecuación de la circunferencia

$sen^2 x + \cos^2 x = 1$ ecuación trigonométrica

$v = \dfrac{d}{t}$ ecuación de la velocidad

Una ecuación algebraica en x contiene sólo expresiones algebraicas tales como: polinomios, expresiones racionales, radicales y otros. Los siguientes enunciados son ecuaciones algebraicas

$$\frac{2}{x+1} + x = \frac{1}{2}\,,\quad \sqrt{x^2 + x - 1} = x + 5\,,\quad (x+2)(x-4) = 3x^2 + 1$$

De acuerdo a su solución una ecuación puede ser: condicional o de identidad

- Ecuación condicional, una ecuación que satisface o es válida solo para algunos valores de la incógnita es una ecuación condicional o simplemente ecuación

Ejemplo 1. Consideremos la ecuación $3x - 5 = 2x + 3$

Si $x = 8$ la ecuación es verdadera o se satisface y no existe otro valor que satisfaga la ecuación.

- Ecuación identidad, una ecuación que satisface o es válida solo para todos los valores de la incógnita es una ecuación identidad

Ejemplo 2. Consideremos la ecuación $(2x+3)(x-2) = 2x^2 - x - 6$

si $x = 0$ satisface la ecuación
si $x = 5$ satisface la ecuación
si x toma cualquier valor real satisface la ecuación.

6.1 ECUACIONES LINEALES

Definición. - Una ecuación lineal con una incógnita es de la forma:

$$ax + b = 0 \text{ con } a,\, b \in \mathrm{R} \text{ además } a \neq 0$$

Directrices para resolver una ecuación lineal

1. Quitar denominadores, multiplicando todos los términos de ambos miembros por el mcm.
2. Eliminar paréntesis,
3. Transponer términos, aislando la variable en un miembro.
4. Despejar la variable o incógnita.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación $\frac{5x+7}{3}=\frac{21+9x}{5}$

Solución

$5(5x+7)=3(21+9x)$ hallando el mcm

$25x+35=63+27x$ quitamos paréntesis

$25x-27x=63-35$ aislamos la variable

$-2x=28$ suma de términos semejantes

$x=-\frac{28}{2}$ aislando la variable

$x=-14$ solución de la ecuación

Verificando la solución

$\frac{5(-14)+7}{3}=\frac{21+9(-14)}{5}\Rightarrow -21=-21$

cumple la igualdad

En el proceso de resolver una ecuación se puede obtener, como posible solución, un número que no es solución de la ecuación dada, ese número se denomina solución extraña o raíz extraña de la ecuación.

Ejemplo 2. Resolver la ecuación $\frac{3x+3}{x-3}-\frac{12}{x-3}=\frac{4}{3}$

Solución

$3(3x+3-12)=4(x-3)$ hallando el mcm

$3(3x-9)=4(x-3)$ con $x\neq 3$

$9x-27=4x-12$ multiplicando los factores

$9x-4x=27-12$ aislando la variable

$5x=15$ simplificando

$x=\frac{15}{5}\Rightarrow x=3$

Verificando la solución cuando $x=3$ tenemos:

$\frac{3(3)+3}{3-3}-\frac{12}{3-3}=\frac{4}{3}\quad\Rightarrow\frac{12}{0}-\frac{12}{0}=\frac{4}{3}$

Como la división entre cero no es permitido, entonces la ecuación no

Existen ecuaciones que no son lineales pero que después de simplificarlas se transforman en ecuaciones lineales como los siguientes ejemplos

Ejemplo 3. Resolver la ecuación $(2x+5)^2-x(4x-5)=100$

Solución

$4x^2+20x+25-4x^2+5x=100$ por productos notables

$25x=75$ aislando la variable

$x=3$ solución de la ecuación

Verificando la solución

$(2x+5)^2-x(4x-5)=100\Rightarrow 121-21=100$

Recordemos que cuando la incógnita de la ecuación está en el denominador, se debe tener en cuenta que no existe divisiones entre cero, entonces los valores de la ecuación tienen que ser distintos de cero.

Ejemplo 4. Analicemos la ecuación $\frac{5}{(x-1)(x+7)}=\frac{1}{2}$

Los valores que le hacen cero al denominador son: $x=1$ y $x=-7$, por lo tanto se tiene que evitar que la variable tome esos valores haciendo que $x\neq 1$ y $x\neq -7$

Ejemplo 5. Resolver la ecuación $\frac{5}{x+2}-\frac{10}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{-(x-2)}$

Solución

$5(x-2)-10=-(x+2)$ el mcm $(x+2)(x-2)$

$5x-10-10=-x-2$ multiplicando los factores

$6x=18$ aislando la variable

$x=3$ siempre que $x\neq\pm 2$

Verificando la solución

$\frac{5}{5}-\frac{10}{5}=\frac{1}{-1}\Rightarrow -1=-1$

Ejemplo 6. Resolver la ecuación $\frac{1}{x^2+3x-28}-\frac{1}{x^2+12x+35}=\frac{3}{x^2+x-20}$

Solución

$\frac{1}{(x+7)(x-4)}-\frac{1}{(x+7)(x+5)}-\frac{3}{(x+5)(x-4)}=0$ factorizando los denominadores

$(x+5)-(x-4)=3(x+7)$ el mcm $(x+7)(x-4)(x+5)$

$3x=9-21$ aislando la variable

$x=-4$ siempre que $x\neq -5$, $x\neq 4$, $x\neq -7$

Verificando la ecuación

$$\frac{1}{16-12-28}-\frac{1}{16-48+35}=\frac{3}{16-4-20}$$

$$-\frac{1}{24}-\frac{1}{3}=-\frac{3}{8}\Rightarrow -\frac{3}{8}=-\frac{3}{8}$$

Ejemplo 7. Resolver la ecuación con radicales $\sqrt{x^2-4ax+16x}+2a=x$

Solución

$\left(\sqrt{x^2-4ax+16x}\right)^2=(x-2a)^2$ elevando al cuadrado ambos miembros

$x^2-4ax+16x=x^2-4ax+4a^2$ usando productos notables en el 2do miembro

$16x=4a^2$ simplificando y aislando la variable

$x=\frac{a^2}{4}$

6.2 ECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES

Definición. - Una ecuación lineal con dos incógnitas o variables *x* e *y* tiene la forma:

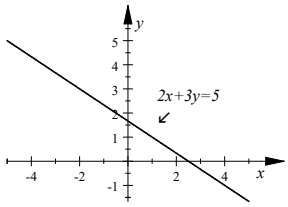
$ax+by+c=0$ donde *a*, *b* y *c* $\in \mathrm{R}$ además $a\neq 0$, $b\neq 0$.

Su gráfica de esta ecuación es una recta que está ubicada en el plano cartesiano. Para encontrar su gráfica es suficiente dar valores a una variable para encontrar el valor de la otra variable.

Analicemos el término independiente de la ecuación

- Si $c\neq 0$, en este caso $c=5$ la gráfica de la ecuación $2x+3y=5$ es una recta que intersecta a los ejes coordenados.

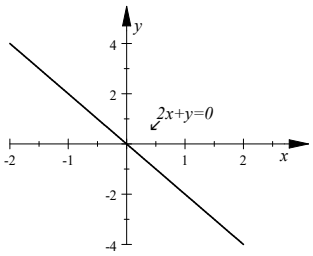
Graficar la ecuación $2x+3y=5 \Rightarrow x=\dfrac{5-3y}{2}$ Construimos una tabla de valores



x	y
0	$\frac{5}{3}$
$\frac{5}{2}$	0

- Si $c=0$, la gráfica de la ecuación $2x+y=0$ es una recta que pasa por el origen.

Graficar la ecuación $2x+y=0 \Rightarrow x=\dfrac{-y}{2}$ Construimos una tabla de valores



x	y
0	0
-2	2

6.3 SISTEMA DE DOS ECCUACIONES LINEALES

Definición. - Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables o incógnitas x, y está dado por:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

donde $a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2 \in \mathrm{R}$ y $a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2 \neq 0$

Resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas implica encontrar los valores de x e y que satisfagan a las dos ecuaciones al mismo tiempo.

Los sistemas de ecuaciones lineales se clasifican en:

- Sistemas Compatibles, si el sistema tiene solución esta puede ser: única o infinitas soluciones.
- Sistemas Incompatibles, si el sistema no tiene solución.

Nota. En este curso solo se estudiarán sistemas compatibles con solución única.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se utilizan los siguientes métodos.

a) *Método de sustitución*

Directrices para resolver un sistema por sustitución

1. Despejar una de las variables de cualquier ecuación (tome la más sencilla)
2. Remplace o sustituya en la otra ecuación
3. Obtendrá una ecuación con una sola incógnita, resuelva la ecuación encontrando el valor de la variable.
4. Sustituya el valor encontrado en la ecuación despejada del paso 1.

Ejemplo 1. Resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$

Solución

$y = \dfrac{2x-1}{3}$ despejamos y de la 1era ecuación

$3x + 2\left(\dfrac{2x-1}{3}\right) = 8$ sustituimos este valor en la 2da ecuación

$9x + 4x - 2 = 24$ resolvemos la ecuación lineal

$13x = 26 \Rightarrow x = 2$ aislando la variable

$y = \dfrac{2(2)-1}{3} \Rightarrow y = 1$ sustituimos este valor en la ecuación

$x = 2\,;\ y = 1$ soluciones únicas del sistema

Verificamos la solución

$3(2) + 2(1) = 8$

entonces $8 = 8$

b) *Método de eliminación o reducciones*

Directrices para resolver un sistema por eliminación

1. Iguale coeficientes opuestos de cualquier variable para eliminar.
2. Resuelva la ecuación lineal con una variable
3. Sustituya el valor encontrado en cualquier ecuación del enunciado.

Ejemplo 1. Resolver el sistema $\begin{cases} 8x + y = -4 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$

Solución

$$\begin{array}{r} -24x - 3y = 12 \\ 2x + 3y = 10 \\ \hline -22x \qquad = 22 \end{array}$$

multiplicando por -3 la variable y

$x = -1$ aislando la variable

$2(-1) + 3y = 10$ reemplazamos en la 2da. ecuación

$3y = 12 \Rightarrow y = 4$

$x = -1\,;\ y = 4$ soluciones únicas del sistema

Verificando la solución

$2(-1) + 3(4) = 10$

entonces $10 = 10$

c) *Método de igualación*

Directrices para resolver un sistema por igualación

1. Despejar una de las variables de ambas ecuaciones
2. Iguale los segundos miembros
3. Resuelva la ecuación con una sola incógnita.
4. Sustituya el valor encontrado en una de las ecuaciones del enunciado.

Ejemplo 1. Resolver el sistema $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 3x-5y=-7 \end{cases}$

Solución

$x=\dfrac{8-3y}{2}$; $x=\dfrac{-7+5y}{3}$ despejamos x de ambas ecuaciones

$\dfrac{8-3y}{2}=\dfrac{-7+5y}{3}$ igualamos los segundos miembros

$3(8-3y)=2(-7+5y)$

$24-9y=-14+10y$ resolviendo la ecuación

$-10y-9y=-24-14$ aislando la variable

$y=\dfrac{38}{19}\Rightarrow y=2$

$2x+3\left(2\right)=8\Rightarrow x=1$ Luego $x=1$; $y=2$ soluciones únicas del sistema

Verificando la solución

$2\left(1\right)+3\left(\dfrac{39}{19}\right)=8$

tenemos $8=8$

En un sistema se pueden presentar ecuaciones que no son lineales, pero es posible transfórmalas a ecuaciones lineales realizando operaciones con fracciones.

Ejemplo 2. Resolver el sistema de ecuaciones no lineales $\begin{cases} \dfrac{1}{3-x}+\dfrac{1}{y-2}=2 \\ \\ \dfrac{7}{3-x}-\dfrac{3}{y-2}=4 \end{cases}$

Solución

$\dfrac{3}{3-x}+\dfrac{3}{y-2}=6$ multiplicamos por 3

$\dfrac{7}{3-x}-\dfrac{3}{y-2}=4$

$\dfrac{10}{3-x}=10$ ecuación lineal

$10=10\left(3-x\right)$ hallando el mcm

$30-10x=10$ aislando la variable $x=2$ simplificando

$\dfrac{1}{y-2}=2-\dfrac{1}{3-2}$ sustituyendo $x=2$ en la 1era. ecuación

$\dfrac{1}{y-2}=1$ hallando el mcm

$1=y-2\Rightarrow y=3$ aislando la variable

$x=2$ y $y=3$ soluciones del sistema

Verificando la solución

$\dfrac{1}{3-2}+\dfrac{1}{3-2}=2\Rightarrow 1+1=2$

Ejemplo 3. Resolver el sistema de ecuaciones no lineales $\begin{cases} \dfrac{2x-5y}{5x-2y} = -8 \\ \dfrac{4\left(5x+2y\right)}{3\left(\dfrac{1}{3}+5y\right)} = 1 \end{cases}$

Solución

$$\begin{cases} 2x-5y &= -8\left(5x-2y\right) \\ 4\left(5x+2y\right) &= 3\left(\dfrac{1}{3}+5y\right) \end{cases} \quad \text{hallando el mcm en ambas ecuaciones}$$

$$\begin{cases} 2x-5y &= -40x+16y \\ 20x+8y &= 1+15y \end{cases} \quad \text{multiplicando los factores}$$

$$\begin{cases} 42x-21y &= 0 \\ 20x-7y &= 1 \end{cases} \quad \text{sistema lineal}$$

$$\begin{array}{rl} 42x \ -21y = 0 & \text{usando el método de eliminación} \\ -60x+21y = -3 & \text{multiplicando por -3 la 2da ecuación} \\ \hline -18x \qquad\quad = -3 & \end{array}$$

$$x = \frac{1}{6} \qquad \text{aislando la variable}$$

$$42\left(\frac{1}{6}\right) - 21y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \quad \text{hallando el valor de } y$$

$x = \dfrac{1}{6}$ y $y = \dfrac{1}{3}$ soluciones únicas del sistema

Verificando la solución

$$\frac{20\left(\frac{1}{6}\right)+8\left(\frac{1}{3}\right)}{1+5\left(\frac{1}{3}\right)} = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

d) *Solución geométrica de un sistema*

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se representa gráficamente por medio de dos rectas en el plano cartesiano

Directrices para graficar un sistema en el plano cartesiano

1. Despeje una variable de las ecuaciones (la más sencilla)
2. Construya una tabla de valores dando 3 o 4 valores a la ecuación despejada.
3. Ubicar estos puntos en el plano cartesiano formando la recta buscada.

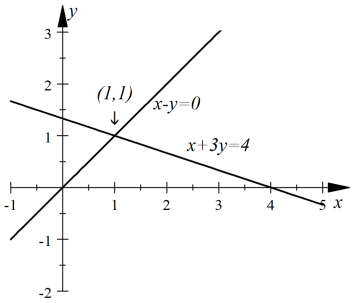
Las dos ecuaciones lineales pueden:

- Intersectarse en un punto, el sistema en este caso es compatible y el punto de intersección de las rectas es la solución del sistema

Ejemplo 1. Resolver el sistema gráficamente $\begin{cases} x+3y=4 \\ x-y=0 \end{cases}$

Solución

Tabla de valores de cada ecuación



$x=4-3y$

x	y
4	0
1	1
-2	2

$x=y$

x	y
0	0
1	1
2	2

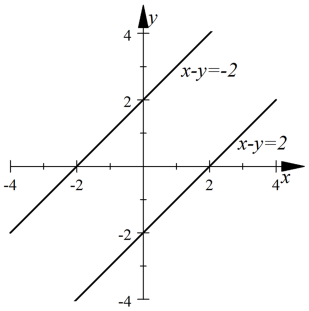
$x=1$ y $y=1$ son soluciones del sistema

- Ser paralelas, el sistema en este caso es incompatible, pues no existe ningún punto que pertenezca a las dos rectas es decir que verifique las dos ecuaciones

Ejemplo 2. Resolver el sistema $\begin{cases} x-y=2 \\ x-y=-2 \end{cases}$

Solución

Tabla de valores de cada ecuación



$x=2+y$

x	y
2	0
3	1
4	2

$x=y-2$

x	y
-2	0
-1	1
0	2

Luego el sistema no presenta solución

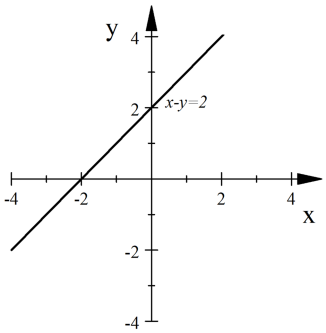
- Coincidir, es decir las ecuaciones la mismas recta

Ejemplo 3. Resolver el sistema $\begin{cases} x-y=2 \\ 2x-2y=4 \end{cases}$

Solución

$\begin{cases} x-y=2 \\ 2x-2y=4 \end{cases} \Rightarrow x-y=2$ el sistema tiene una sola ecuación

Tabla de valores de la ecuación



$x=2+y$

x	y
2	0
3	1
4	2

Luego el sistema presenta infinitas soluciones

6.4 SISTEMA DE TRES ECUACIONES CON TRES INCÓGNITAS

Definición. - Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas tiene la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Directrices para resolver un sistema en de tres ecuaciones

1. Utilice el método de eliminación o reducción, elimine de las ultimas ecuaciones la misma variable, trabajando la ecuación (1) con la ecuación (2) como resultado tendrá una ecuación (4), luego la (1) con la (3) obteniendo la ecuación (5).
2. Las nuevas ecuaciones obtenidas (4) y (5) son de dos variables, nuevamente por eliminación como resultado se obtiene una ecuación lineal.

Ejemplo 1. Resolver $\begin{cases} 3x - 2y - z = -5 & (1) \\ 2x + y - 3z = -1 & (2) \\ x - 3y - 2z = -12 & (3) \end{cases}$

Solución

Eliminando la variable z de las tres ecuaciones del sistema

$$\begin{array}{l} -9x + 6y + 3z = 15 \\ \underline{2x + \ \ y - 3z = -1} \\ -7x + 7y \qquad = 14 \Rightarrow x - y = -2(4) \end{array} \qquad \begin{array}{l} -6x + 4y + 2z = 10 \\ \underline{\ \ \ x - 3y - 2z = -12} \\ -5x + y \qquad = -2 \Rightarrow -5x + y = -2(5) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \ \ x - y = -2 \quad \text{la ecuación 4 y 5} \\ \underline{-5x + y = -2} \\ -\ 4x \qquad = -4 \quad \Rightarrow x = 1 \end{array}$$

$1 - y = -2 \Rightarrow y = 3$ sustituyendo en la ecuación (4)

$3(1) - 2(3) - z = -5 \Rightarrow z = 2$ sustituyendo en (1)

$x = 1, y = 3, z = 2$ soluciones únicas del sistema

Verificando las soluciones del sistema

$3x - 2y - z = -5$
$3(1) - 2(3) - (2) = -5$
$3 - 6 - 2 = -5$
$-5 = -5$

Cumple la igualdad

Ejemplo 2. Resolver el sistema $\begin{cases} \dfrac{xy}{5x+4y} = 6 \\ \dfrac{xz}{3x+2z} = 8 \\ \dfrac{yz}{3y+5z} = 6 \end{cases}$

Solución

$$\begin{cases} \dfrac{5x+4y}{xy} = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{3x+2z}{xz} = \dfrac{1}{8} \\ \dfrac{3y+5z}{yz} = \dfrac{1}{6} \end{cases} \text{ invirtiendo las ecuaciones}$$

$$\begin{cases} \dfrac{5x}{xy} + \dfrac{4y}{xy} = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{3x}{xz} + \dfrac{3x}{xz} = \dfrac{1}{8} \\ \dfrac{3y}{yz} + \dfrac{5z}{yz} = \dfrac{1}{6} \end{cases} \text{ repartiendo el denominador}$$

$$\begin{cases} \dfrac{5}{y} + \dfrac{4}{x} = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{3}{z} + \dfrac{2}{x} = \dfrac{1}{8} \\ \dfrac{3}{z} + \dfrac{5}{y} = \dfrac{1}{6} \end{cases} \text{ simplificando}$$

Haciendo cambio de variable $u = \frac{1}{x}, \quad v = \frac{1}{y}, \quad w = \frac{1}{z}$

$$\begin{cases} 4u \quad +5v \qquad\quad = \dfrac{1}{6} & (1) \\ 2u \qquad\quad +3w \quad = \dfrac{1}{8} & (2) \\ \qquad 5v \quad +3w \quad = \dfrac{1}{6} & (3) \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones 1 y 2 luego restando la ecuación 3 obtenemos

$$\begin{array}{l} 4u \quad +5v \qquad\quad = \dfrac{1}{6} \\ 2u \qquad\quad +3w \quad = \dfrac{1}{8} \\ \hline 6u \quad +5v \quad +3w = \dfrac{7}{24} \end{array} \quad \text{luego} \quad \begin{array}{r} 6u + 5v + 3w = \dfrac{7}{24} \\ -5v - 3w = -\dfrac{1}{6} \\ \hline 6u \qquad\qquad\qquad = \dfrac{1}{8} \end{array}$$

$u = \dfrac{1}{48}$; $v = \dfrac{1}{60}$; $w = \dfrac{1}{36}$

Luego $x = 48$; $y = 60$ y $z = 36$ soluciones del sistema

6.5 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

Definición.- La ecuación de segundo grado (o ecuación cuadrática) con una sola incógnita es de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ con } a, b, c \in \mathrm{R} \text{ además } a \neq 0.$$

Toda ecuación de segundo grado con una sola incógnita, tiene dos soluciones o raíces estas son: x_1 y x_2.

La ecuación cuadrática se dice completa si todos los coeficientes de la ecuación a, b y c son diferentes de cero de lo contrario se dice incompleta.

Se presentan los siguientes casos para una ecuación cuadrática incompleta.

1. Si $b \neq 0$ y $c = 0$; entonces la ecuación será de la forma:

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x\left(ax + b\right) = 0$$

Ahora, tenemos dos números reales (x y $ax + b$), que multiplicados entre sí, dan por resultado 0. Lo que quiere decir que al menos una de las soluciones es 0, por lo tanto, tenemos:

$$x_1 = 0$$

$$ax_2 + b = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{a}$$

2. Si $b = 0$ y $c \neq 0$; entonces la ecuación será de la forma:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

La cantidad subradical es la solución de esta ecuación, este subradical puede ser negativa o positiva, lo que nos conduce a determinar la naturaleza de las raíces o soluciones de la ecuación incompleta.

Si el subradical $-\frac{c}{a} \geq 0$ la solución son números reales.

Si el subradical $-\frac{c}{a} < 0$ la solución son números complejos.

3. Si $b = 0$ y $c = 0$ entonces la ecuación tiene la forma:

$$ax^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Los métodos de resolución para la una ecuación de segundo grado son:

a) *Resolución por factorización*

Directrices para resolver una ecuación por factorización

1. Factorizar la ecuación usando el método del aspa o el método de los trinomios
2. Igualar cada factor a cero.
3. Resolver la ecuación lineal encontrando las soluciones de la ecuación

Ejemplo 1. Resolver la ecuación $x^2 - 7x + 12 = 0$

Solución

$(x-3)(x-4) = 0$ factorizando

$x_1 - 3 = 0$ y $x_2 - 4 = 0$ igualando a cero cada factor

$x_1 = 3$ y $x_2 = 4$ soluciones de la ecuación

Ejemplo 2. Resolver la ecuación $3x^2 + 2x - 5 = 0$

Solución

$(3x_1 + 5)(x_2 - 1) = 0$ factorizando

$3x_1 + 5 = 0$ y $x_2 - 1 = 0$ igualando a cero cada factor

$x_1 = -\frac{5}{3}$ y $x_2 = 1$ soluciones de la ecuación

b) *Resolución completando un cuadrado perfecto*

Directrices para resolver una ecuación por completación

1. El coeficiente de x^2 debe ser uno es decir $a = 1$.
2. El término independiente siempre está en el segundo miembro.
3. Sumar la constante $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ en ambos miembros de la ecuación
4. El primer miembro es un trinomio cuadrado perfecto.
5. Resolver la ecuación lineal.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación $x^2 - 7x + 12 = 0$

Solución

$x^2 - 7x = -12$ término independiente al segundo miembro

$x^2 - 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$ sumado el cuadrado de la mitad del coeficiente de x

$x^2 - 7x + \frac{49}{4} = \frac{49}{4} - 12$ realizando operaciones

$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ el trinomio es un cuadrado perfecto

$x - \frac{7}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$ extrayendo raíces tenemos $x = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}$ aislando la variable

$x_1 = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = 4$ solución de la ecuación

$x_2 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = 3$ solución de la ecuación

Ejemplo 2. Resolver $3x^2 + 2x - 5 = 0$

Solución

$x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = 0$ dividimos entre 3 a toda la ecuación

$x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{5}{3}$ aislando el término independiente

$x^2 + \frac{2}{3}x + \left(\frac{\frac{2}{3}}{2}\right)^2 = \frac{5}{3} + \left(\frac{\frac{2}{3}}{2}\right)^2$ sumado el cuadrado de la mitad del coeficiente de x

$x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{36} = \frac{5}{3} + \frac{4}{36}$ realizando operaciones

$\left(x + \frac{2}{6}\right)^2 = \frac{16}{9}$ el trinomio es cuadrado perfecto

$x + \frac{2}{6} = \pm\sqrt{\frac{16}{9}}$ resolviendo la ecuación lineal $x = -\frac{2}{6} \pm \frac{4}{3}$ despejando la variable

$x_1 = -\frac{2}{6} + \frac{4}{3} \Rightarrow x_1 = 1$ solución de la ecuación

$x_2 = -\frac{2}{6} - \frac{4}{3} \Rightarrow x_2 = -\frac{5}{3}$ solución de la ecuación

c) *Resolución aplicando la fórmula general*

Directrices para resolver una ecuación por la fórmula

1. Identificar los coeficientes de la ecuación.
2. Aplicar la fórmula de Bhaskara reemplazando los coeficientes identificados

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Cuando se utiliza la fórmula general es preciso analizar el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$

Si $\Delta > 0$ la ecuación tiene dos raíces reales y distintas.
Si $\Delta < 0$ la ecuación no tiene raíces reales; tiene dos raíces complejas conjugadas
Si $\Delta = 0$ la ecuación tiene una única solución real, diremos que es una raíz doble.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación $x^2 - 7x + 12 = 0$

Solución

$a = 1$; $b = -7$; $c = 12$ identificando los coeficientes

$x_1 = \frac{-(-7) + \sqrt{7^2 - 4(12)}}{2} \Rightarrow x_1 = 4$ solución de la ecuación

$x_2 = \frac{-(-7) - \sqrt{7^2 - 4(12)}}{2} \Rightarrow x_2 = 3$ solución de la ecuación

Ejemplo 2. Resolver la ecuación $4x^2+5x+9=0$

Solución

$a=4$; $b=5$; $c=9$ identificando los coeficientes

$\Delta=25-144=-119$ analizando el discriminante

$\Delta<0$ el sistema no tiene solución.

Ejemplo 3. Resolver la ecuación $3x^2+2x-5=0$

Solución

$a=3$; $b=2$; $c=-5$ identificando los coeficientes

$x_1=\dfrac{-(2)+\sqrt{2^2-4(3)(-5)}}{2(3)}\Rightarrow x_1=1$ solución de la ecuación

$x_2=\dfrac{-(2)+\sqrt{2^2-4(3)(-5)}}{2(3)}\Rightarrow x_2=-\dfrac{5}{3}$ solución de la ecuación

d) *Propiedades de las raíces de una ecuación cuadrática*

Sean x_1 y x_2 las raíces o soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ entonces se cumple que:

$$1.\ x_1+x_2=-\frac{b}{a} \qquad 2.\ x_1.x_2=\frac{c}{a}$$

Ejemplo 1. Hallar el valor de k para que el producto de las raíces de la ecuación cuadrática:

$$(k-2)x^2-21x+10k=0 \text{ sea } 20\ .$$

Solución

$a=k-2$, $b=-21$, $c=10k$ coeficientes

$x_1.x_2=\dfrac{c}{a}$ usando la segunda propiedad

$20=\dfrac{10k}{k-2}$ sustituyendo los coeficientes

$20(k-2)=10k$ hallando el mcm

$10k=40$ resolviendo la ecuación lineal

$k=4$

Verifiquemos la ecuación

$2x^2-21x+40=0$ sustituyendo el valor de *k*

$(x-8)(2x-5)=0$ factorizando por aspa

$x_1=8$ y $x_2=\dfrac{5}{2}$ luego $x_1.x_2=8\left(\dfrac{5}{2}\right)=20$

Ejemplo 2. Hallar k para que una raíz sea el doble de la otra en la ecuación $2x^2+kx+36=0$

Solución

$a=2$, $b=k$, $c=36$ identificando los coeficientes de la ecuación

$x_2=2x_1$ condición del ejercicio

$x_1.x_2=\dfrac{36}{2}$ usando la segunda propiedad

$x_1.(2x_1)=18$ sustituyendo la segunda solución

$\left(x_1\right)^2 = 9$ multiplicando los factores

$x_1 = \sqrt{9} \Rightarrow x_1 = 3$ primera solución

$x_2 = 2x_1 \Rightarrow x_2 = 6$ segunda solución

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ usando la primera propiedad

$9 = -\dfrac{k}{2} \Rightarrow k = -18$ valor de k

$2x^2 - 18x + 36 = 0$ ecuación buscada.

Ejemplo 3. Si la diferencia de las raíces de la ecuación $x^2 - 3kx + \left(2k+1\right) = 0$ es 4 ¿Cuánto vale *k*?.

Solución

$a = 1$, $b = -3k$, $c = 2k+1$ identificando los coeficientes de la ecuación

$x_1 - x_2 = 4$ condición del ejercicio

$x_1 + x_2 = 3k$ usando la primera propiedad

$$\begin{array}{l} x_1 - x_2 = 4 \\ \underline{x_1 + x_2 = 3k} \\ 2x_1 \quad = 4 + 3k \end{array}$$

sumando miembro a miembro

$x_1 = \dfrac{4+3k}{2}$ despejando la variable

$\left(\dfrac{4+3k}{2}\right)^2 - 3k\left(\dfrac{4+3k}{2}\right) + \left(2k+1\right) = 0$ como es raíz satisface la ecuación

$\dfrac{16+24k+9k^2}{4} - \dfrac{12+9k^2}{2} + \left(2k+1\right) = 0$ usando productos notables

$16 + 24k + 9k^2 - 24k - 18k^2 + 8k + 4 = 0$ hallando el mcm

$20 + 8k - 9k^2 = 0$ simplificando

$9k^2 - 8k - 20 = 0$ luego $\left(k_1 - 2\right)\left(9k_2 + 10\right) = 0$ factorizando por aspa

$k_1 - 2 = 0$ y $9k_2 + 10 = 0$ igualando a cero cada factor

$k_1 = 2$ y $k_2 = -\dfrac{10}{9}$ valores de *k*

e) *Ecuaciones reducibles a la forma cuadrática*

Son aquellas ecuaciones que tienen la forma general: $aw^2 + bw + c = 0$ donde w está en función de x.

Directrices para resolver ecuaciones reducibles a cuadráticas

1. Usando exponente exprese la ecuación a una ecuación de segundo grado
2. Realice un cambio de variable,
3. Resuelva la ecuación por cualquier método estudiado
4. Sustituya a la variable original

Ejemplo 1. Resolver la ecuación $x^4 + 2x^2 - 24 = 0$

Solución

$\left(x^2\right)^2 + 2\left(x^2\right) - 24 = 0$ expresando en una ecuación de 2do. grado

$w^2 + 2w - 24 = 0$ haciendo un cambio de variable $w = x^2$

$\left(w+6\right)\left(w-4\right) = 0$ factorizando por aspa

$w + 6 = 0$ y $w - 4 = 0$ igualando a cero cada factor $w = -6$ y $w = 4$

$x^2 = -6$ y $x^2 = 4$ sustituyendo a la variable original

$x_1 = \sqrt{-6}$ no es solución

$x_2 = \pm 2$ raíz de la ecuación

Ejemplo 2. Resolver la ecuación $8x^6 - 215x^3 - 27 = 0$

Solución

$8\left(x^3\right)^2 - 215\left(x^3\right) - 27 = 0$ expresando en una ecuación de 2do. grado

$8w^2 - 215w - 27 = 0$ haciendo un cambio de variable $w = x^3$

$\left(8w+1\right)\left(w-27\right) = 0$ factorizando por aspa

$8w + 1 = 0$ y $w - 27 = 0$ igualando a cero cada factor

$w = -\frac{1}{8}$ y $w = 27$ resolviendo la ecuación lineal

$x^3 = -\frac{1}{8}$ y $x^3 = 27$ sustituyendo a la variable original

$x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = 3$ raíces de la ecuación, las demás raíces son complejas

Ejemplo 3. Resolver la ecuación $8\left(x-3\right)^4 - 38\left(x-3\right)^2 + 9 = 0$

Solución

$8w^2 - 38w + 9 = 0$ haciendo un cambio de variable $w = \left(x-3\right)^2$

$\left(4w-1\right)\left(2w-9\right) = 0$ factorizando por aspa $4w - 1 = 0$ y $2w - 9 = 0$ igualando cada factor

$w = \frac{1}{4}$ y $w = \frac{9}{2}$ resolviendo la ecuación lineal

$\left(x-3\right)^2 = \frac{1}{4}$ y $\left(x-3\right)^2 = \frac{9}{2}$ sustituyendo a la variable original

$x_1 = 3 \pm \frac{1}{2}$ y $x_2 = 3 \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$ raíces de la ecuación

6.7 EJERCICIOS PROPUESTOS

Resolver las ecuaciones lineales

1. $\dfrac{x+4}{3}-\dfrac{x-4}{5}=2+\dfrac{3x-1}{15}$ R. $x=3$

2. $\dfrac{7}{x^2-4}+\dfrac{2}{x^2-3x+2}=\dfrac{4}{x^2+x-2}$ R. $x=-1$

3. $\dfrac{x+a^2}{(a+b-c)(a-b+c)}+\dfrac{x-b^2-c^2}{(c-a-b)(b-a-c)}=1$ R. $x=bc$

4. $\dfrac{2+2x}{9x^2-4}-\dfrac{x-2}{9x^2+12x+4}=\dfrac{x+4}{9x^2-4}$ R. $x=2$

5. $\dfrac{x}{ab}+\dfrac{x}{bc}+\dfrac{x}{ac}-1=abc-x(a+b+c)$ R. $x=\dfrac{abc}{a+b+c}$

6. $\dfrac{ax-b}{a+b}+\dfrac{bx+a}{a-b}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ R. $x=0$

7. $\left(\dfrac{a+1}{ax+1}+\dfrac{x+1}{x+a^{-1}}-1\right)\div\left[\dfrac{a+1}{a\left(x+a^{-1}\right)}-\dfrac{a(x+1)}{ax+1}+1\right]=\dfrac{x}{2}$ R. $x=2a$

8. $\left[x-1+\dfrac{\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{b}}{1+\dfrac{1}{ab}}\right]\div\left[1-x-\dfrac{\dfrac{1}{a}+1}{\dfrac{1}{a}+b}\right]=a$ R. $a=-1$

9. $\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x+5}=\sqrt{3x}-\sqrt{3x+2}$ R. $x=3$

10. $\dfrac{\sqrt{5x+a}+\sqrt{6x}}{\sqrt{5x+a}-\sqrt{6x}}=4$ R. $x=\dfrac{3a}{35}$

Graficar las siguientes ecuaciones lineales

1. $5x-4y=12$ 2. $3x-2y=0$ 3. $5x+y+5=0$ 4. $-3x-5y=0$

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con dos variables

1. $\begin{cases}3x-y=-6\\2x+3y=7\end{cases}$ R. $\begin{matrix}x=-1\\y=3\end{matrix}$

2. $\begin{cases}2x-3y=9\\3x+4y=5\end{cases}$ R. $\begin{matrix}x=3\\y=-1\end{matrix}$

3. $\begin{cases}9x+7y=0\\5x-9y=0\end{cases}$ R. $\begin{matrix}x=0\\y=0\end{matrix}$

4. $\begin{cases}2x+5y=3\\3x-2y=1\end{cases}$ R. $\begin{matrix}x=\frac{11}{19}\\y=\frac{7}{19}\end{matrix}$

5. $\begin{cases}\dfrac{3x+2y}{x+y-15}=-9\\\dfrac{4x}{3}-\dfrac{5(y-1)}{8}=-1\end{cases}$ R. $\begin{matrix}x=3\\y=9\end{matrix}$

6. $\begin{cases}\dfrac{2x-1}{3}+\dfrac{y+2}{4}=4\\\dfrac{x+3}{2}-\dfrac{x-y}{3}=3\end{cases}$ R. $\begin{matrix}x=5\\y=2\end{matrix}$

7. $\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=3\\\dfrac{x}{2a}-\dfrac{3y}{b}=-2\end{cases}$ R. $\begin{matrix}x=2a\\y=b\end{matrix}$

8. $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=1\\\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}=-\dfrac{7}{4}\end{cases}$ R. $\begin{matrix}x=-2\\y=\dfrac{4}{3}\end{matrix}$

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas

1. $\begin{cases} 5x-2y+z=24 \\ 2x+5y-2z=-14 \\ x-4y+3z=26 \end{cases}$ R. $\begin{array}{l} x=3 \\ y=-2 \\ z=5 \end{array}$

2. $\begin{cases} 2x-z=24 \\ 4x+y-z=41 \\ 3x-y+5z=53 \end{cases}$ R. $\begin{array}{l} x=\frac{38}{3} \\ y=-\frac{25}{3} \\ z=\frac{4}{3} \end{array}$

3. $\begin{cases} 3x-2y=0 \\ 3y-4z=25 \\ -5x+z=-14 \end{cases}$ R. $\begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \\ z=-4 \end{array}$

4. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{7}{6} \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{z}=\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{7}{6} \end{cases}$ R. $\begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \\ z=6 \end{array}$

5. $\begin{cases} x-\dfrac{y+z}{3}=4 \\ y-\dfrac{x+z}{8}=10 \\ x-\dfrac{y-x}{2}=5 \end{cases}$ R. $\begin{array}{l} x=\frac{158}{23} \\ y=\frac{244}{23} \\ z=-2 \end{array}$

Resolver las ecuaciones cuadráticas por factorización

1. $4x-5x^2=-12$ R. $x_1=2,\ x_2=-\dfrac{6}{5}$

2. $\dfrac{x}{2a}=\dfrac{4a}{x+2a}$ R. $x_1=2a,\ x_2=-4a$

3. $\dfrac{1}{4-x}-\dfrac{1}{2+x}=\dfrac{1}{4}$ R. $x_1=2,\ x_2=-8$

4. $\dfrac{2c-3y}{y-c}-\dfrac{y}{2y-c}=\dfrac{2}{3}$ R. $y_1=\dfrac{2c}{5},\ y_2=\dfrac{4c}{5}$

5. $\dfrac{2x-1}{x+2}+\dfrac{x+2}{2x-1}=\dfrac{10}{3}$ R. $x_1=-7,\ x_2=1$

6. $3x^2-2=5x$ R. $x_1=2,\ x_2=-\dfrac{1}{3}$

7. $9x^2+6x=4$ R. $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{3},\ x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{3}$

8. $\dfrac{2x+3}{4x-1}=\dfrac{3x-2}{3x+2}$ R. $x_1=\dfrac{14+\sqrt{214}}{6},\ x_2=\dfrac{14-\sqrt{214}}{6}$

9. $\dfrac{5x^2-2p^2}{x}=\dfrac{p}{3}$ R. $x_1=\dfrac{2p}{3},\ x_2=-\dfrac{3p}{5}$

10. $6y^2=19y-15$ R. $y_1=\dfrac{5}{3},\ y_2=\dfrac{3}{2}$

Resolver las ecuaciones por completación de cuadrados

1. $3t^2+8t+5=0$ R. $t_1=-1,\ t_2=-\dfrac{5}{3}$

2. $x^2 - 4mx + 4m^2 - n^2 = 0$ R. $x_1 = 2m + n$, $x_2 = 2m - n$

3. $x(x-3) = 4$ R. $x_1 = 4$, $x_2 = -1$

4. $x^2 - 2bx + b^2 - a = 0$ R. $x_1 = b + \sqrt{a}$, $x_2 = b - \sqrt{a}$

5. $4x^2 - 9x + 3 = 0$ R. $x_1 = \dfrac{9+\sqrt{33}}{8}$, $x_2 = \dfrac{9-\sqrt{33}}{8}$

Resolver las ecuaciones utilizando la fórmula

1. $\left(m^2 - n^2\right)w^2 - 2m^2nw + m^2n^2 = 0$ R. $w_1 = \dfrac{mn}{m+n}$, $w_2 = \dfrac{mn}{m-n}$

2. $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a+x} + \dfrac{1}{a+2x} = 0$ R. $x_1 = \dfrac{a(\sqrt{3}-3)}{2}$, $x_2 = -\dfrac{a(\sqrt{3}+3)}{2}$

3. $\dfrac{x^2+1}{b^2x - 2b} = \dfrac{1}{2-bx} + \dfrac{x}{b}$ R. $x_1 = -1$, $x_2 = \dfrac{1+b}{b-1}$

4. $\dfrac{x+n+\sqrt{x^2-n^2}}{x+n-\sqrt{x^2-n^2}} = \dfrac{9\left(x+n\right)}{8n}$ R. $x_1 = \dfrac{5n}{3}$

5. $\left(a+b\right)\left(ax+b\right)\left(a-bx\right) = \left(a^2x - b^2\right)(a+bx)$ R. $x_1 = 1$, $x_2 = -\dfrac{a+2b}{2a+b}$

Calcular el valor de k

1. En la ecuación $x^2 - kx + 48 = 0$ si sus raíces cumplen: $x_1 = 3x_2$ R. $k = \pm 16$

2. En la ecuación $x^2 - 3kx + k^2 = 0$ si sus raíces cumplen: $x_1^2 + x_2^2 = 175$ R. $k = \pm 5$

3. Calcular $Q = \dfrac{\left(5-3a\right)\left(5-3b\right)}{\left(4a+1\right)\left(4b+1\right)}$ siendo a y b raíces de la $3x^2 - 5x + 4 = 0$ R. $Q = \dfrac{12}{29}$

4. Hallar la ecuación cuyas raíces son: $x_1 = 5 + \sqrt{3}$, $x_2 = 5 - \sqrt{3}$ R. $x^2 - 10x + 22 = 0$

5. Hallar k si las raíces son simétricas $\dfrac{x^2+3x}{5x+2} = \dfrac{k-1}{k+1}$ R. $k = 4$

Resolver las ecuaciones reducibles a la forma cuadrática

1. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ R. ± 2, ± 3

2. $4x^{-4} - 17x^{-2} + 4 = 0$ R. ± 2, $\pm \dfrac{1}{2}$

3. $x^3 - 7x^{\frac{3}{2}} - 8 = 0$ R. $x = 4$

4. $\left(x^2 - 6x\right)^2 - 2\left(x^2 - 6x\right) = 35$ R. 7 , 5 , ± 1

5. $\sqrt{x+2} - \sqrt[4]{x+2} = 6$ R. 79