CAPÍTULO 3

FACTORIZACIÓN

Factorizar un polinomio significa escribirlo como producto de otros polinomios llamados factores primos, un factor primo es aquel polinomio que no puede factorizarse.

Para la descomposición en factores primos, son muy útiles las fórmulas dadas en el capítulo anterior, es más, dichas fórmulas leídas de izquierda a derecha dan como resultado de un producto y leídas al contrario serán la descomposición en factores, es decir:

$$\xrightarrow{\text{Producto}}$$

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

$$\xleftarrow[\text{Factorización}]{}$$

Entre los principales casos de factorización se tienen los siguientes:

3.1 FACTOR COMÚN

Directrices para identificar un factor común

1. Se aplica cuando en todos los términos de un polinomio, existe cierto monomio o polinomio en común.
2. Esté será el factor común que queda multiplicado al resto de toda la expresión.
3. Para obtener el factor común se aplica la propiedad distributiva de los números reales.

   1. $ab+ac=a(b+c)$ 2. $(a+b)c+(a+b)d=(a+b)(c+d)$

Ejemplo 1. Factorizar el polinomio $x^{n+3}+x^{n+7}+x^{n+9}$

Solución

$x^nx^3+x^nx^7+x^nx^9$ aplicando leyes exponenciales $a^na^m=a^{n+m}$

$\underline{x^nx^3}+\underline{x^nx^3}\ x^4+\underline{x^nx^4}\ x^5$ identificando el factor común

$x^nx^3\left(1+x^4+x^6\right)=x^{n+3}\left(1+x^4+x^6\right)$ polinomio factorizado

Ejemplo 2. Factorizar el polinomio $15a^2x^2-30a^2x^3+105a^2x^4-75a^2x^5$

Solución

$\underline{15a^2x^2}-(2)\underline{15a^2x^2}x+(7)\underline{15a^2x^2}x^2-(5)\underline{15a^2x^2}x^3$ identificando el factor común

$15a^2x^2\left(1-2x+7x^2-5x^3\right)$ polinomio factorizado

Ejemplo 3. Factorizar $(x+3)(x+2)(x+1)+(x+2)(x+1)+(x+1)$

Solución

$(x+3)(x+2)\underline{(x+1)}+(x+2)\underline{(x+1)}+\underline{(x+1)}$ identificando el polinomio común

$(x+1)\left[(x+3)(x+2)+(x+2)+1\right]$ factor común

$(x+1)\left(x^2+5x+6+x+2+1\right)$ simplificando $(x+1)\left(x^2+6x+9\right)$

Ejemplo 4. Factorizar $a(b-c)+a^2(c-b)$

Solución

$a(b-c)-a^2(b-c)$ factorizando el signo del segundo factor

$\underline{a(b-c)}-a\underline{a(b-c)}$ identificando el polinomio común

$a(b-c)(1-a)$ polinomio factorizado

3.2 DIFERENCIA DE CUADRADOS

Directrices para identificar una diferencia de cuadrados

1. Se aplica sobre binomios, que contengan una diferencia entre sus términos cuadráticos o de potencia par.
2. Los términos a, b que quedan en un producto de diferencia y suma estas son las raíces cuadradas de las expresiones cuadráticas originales: a^2, b^2

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

Ejemplo 1. Factorizar $16a^2b^2-81a^2b^2c^2$

Solución

$(4ab)^2-(9abc)^2$ expresando en potencia

$(4ab+9abc)(4ab-9abc)$ aplicando diferencia de cuadrados

Ejemplo 2. Factorizar $49x^{10n}-\dfrac{y^{12a}}{81}$

Solución

$\left(7x^{5n}\right)^2-\left(\dfrac{y^{6a}}{9}\right)^2$ usando propiedades de exponentes

$\left(7x^{5n}+\dfrac{y^{6a}}{9}\right)\left(7x^{5n}-\dfrac{y^{6a}}{9}\right)$ aplicando diferencias de cuadrados

Ejemplo 3. Factorizar $x^{5m}-9x^{3m}y^{4n}$

Solución

$x^{3m}x^{2m}-9x^{3m}y^{4n}$ usando propiedades de los exponentes

$\underline{x^{3m}}x^{2m}-9\underline{x^{3m}}y^{4n}$ identificando el factor común

$x^{3m}\left(x^{2m}-9y^{4n}\right)$ factorizando el monomio común

$x^{3m}\left[\left(x^m\right)^2-\left(3y^{2n}\right)^2\right] = x^{3m}\left(x^m+3y^{2n}\right)\left(x^m-3y^{2n}\right)$ por diferencia de cuadrados

Ejemplo 4. Factorizar $\left(\dfrac{x+y}{z}\right)^2-z$

Solución

$\left(\dfrac{x+y}{z}\right)^2-\left(\sqrt{z}\right)^2$ usando radicales $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$

$\left(\dfrac{x+y}{z}+\sqrt{z}\right)\left(\dfrac{x+y}{z}-\sqrt{z}\right)$ aplicando diferencia de cuadrados

Ejemplo 5. Factorizar $4\left(x+3y\right)^2-9\left(2x-y\right)^2$

Solución

$2^2\left(x+3y\right)^2-3^2\left(2x-y\right)^2$ aplicando leyes de los exponentes

$\left[2\left(x+3y\right)\right]^2-\left[3\left(2x-y\right)\right]^2$

$\left[2\left(x+3y\right)+3\left(2x-y\right)\right]\left[2\left(x+3y\right)-3\left(2x-y\right)\right]$ diferencia de cuadrados

$\left(2x+6y+6x-3y\right)\left(2x+6y-6x+3y\right)$ multiplicando factores

$\left(8x+3y\right)\left(9y-4x\right)$ sumando términos semejantes

3.3 TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Directrices para identificar un trinomio cuadrado perfecto

1. Extraen las raíces cuadradas del primer y tercer término.
2. Comprueba que el segundo término sea dos veces el producto del primer y tercer término
3. El signo en el binomio es el signo del término medio del trinomio.
4. Utiliza los términos cuadrados para factorizar el trinomio como el cuadrado de un binomio.

$$\begin{array}{cccc} a^2 & +2ab & +b^2 & =\left(a+b\right)^2 \\ \downarrow & & \downarrow & \\ \underset{1er}{a} & \Downarrow & \underset{3er}{b} & \\ & \underset{2do}{2ab} & & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} a^2 & -2ab & +b^2 & =\left(a-b\right)^2 \\ \downarrow & & \downarrow & \\ \underset{1er}{a} & \Downarrow & \underset{3er}{b} & \\ & \underset{2do}{2ab} & & \end{array}$$

Ejemplo 1. Factorizar $4a^2+12ab+9b^2$

Solución

$\underset{\underset{2a}{\downarrow}}{4a^2}+12ab+\underset{\underset{3b}{\downarrow}}{9b^2}=\left(2a+3b\right)^2$ polinomio factorizado

$2\left(2a\right)\left(3b\right)=12ab$ verificando el segundo paso

Ejemplo 2. Factorizar $25x^2-60xy+36y^2$

Solución

$\underset{\underset{5x}{\downarrow}}{25x^2}-60xy+\underset{\underset{6y}{\downarrow}}{36y^2}=\left(5x-6y\right)^2$ polinomio factorizado

$2\left(5x\right)\left(6y\right)=60xy$ verificando el segundo paso

Ejemplo 3. Factorizar $x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$

Solución

$\underset{\underset{x}{\downarrow}}{x^2}+\frac{2}{3}x+\underset{\underset{\frac{1}{3}}{\downarrow}}{\frac{1}{9}}=\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$ polinomio factorizado

$2x^2\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}x^2$ verificando el segundo paso

Ejemplo 4. Factorizar $-9a^4 + 24a^2b^2 - 16b^4$

Solución

$$-(\underset{\substack{\downarrow \\ 3a^2}}{9a^4} - 24a^2b^2 + \underset{\substack{\downarrow \\ 4b^2}}{16b^4}) = -\left(3a^2 - 4b^2\right)^2 \text{ polinomio factorizado}$$

$$2\left(3a^2\right)\left(4y^2\right) = 24a^2b^2 \text{ verificando si es trinomio cuadrado perfecto}$$

Ejemplo 5. Factorizar $\left(x+2y\right)^2 + 10\left(x+2y\right) + 25$

Solución

$$\underset{\substack{\downarrow \\ x+2y}}{\left(x+2y\right)^2} + 10\left(x+2y\right) + \underset{\substack{\downarrow \\ 5}}{25} = \left(x+2y+5\right)^2 \text{ polinomio factorizado}$$

$$2\left(x+2y\right)\left(5\right) = 10\left(x+2y\right) \text{ verificando si el trinomio es perfecto}$$

3.4 SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS

Directrices para identificar una suma y diferencia

1. Cada término debe estar elevado al cubo que se suman o restan entre sí.
2. Se aplica las siguientes fórmulas dependiendo del signo.

$$a^3 + b^3 = \left(a+b\right)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = \left(a-b\right)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

Ejemplo 1. Factorizar $x^3 + 8y^3$

Solución

$$x^3 + \left(2y\right)^3 \text{ expresando en potencias cubicas}$$

$$x^3 + \left(2y\right)^3 = \left(x+2y\right)\left(x^2 - 2xy + 4y^2\right) \text{ polinomio factorizado}$$

Ejemplo 2. Factorizar $8x^{12} - 27y^6$

Solución

$$\left(2x^4\right)^3 - \left(3y^2\right)^3 \text{ expresando en potencias cubicas}$$

$$\left(2x^4\right)^3 - \left(3y^2\right)^3 = \left(2x^4 - 3y^2\right)\left(4x^8 + 6x^4y^2 + 9y^4\right) \text{ polinomio factorizando}$$

Ejemplo 3. Factorizar $27x^3 + 8 + 3x + 2$

Solución

$$\left[\left(3x\right)^3 + 2^3\right] + (3x+2) \text{ expresando en potencias cubicas}$$

$$(3x+2)(9x^2 - 6x + 4) + \left(3x+2\right) \text{ descomponiendo la suma de cubos}$$

$$(3x+2)\left(9x^2 - 6x + 5\right) \text{ polinomio factorizado}$$

3.5 FACTORIZACION DE TRINOMIOS POR EL MÉTODO DEL ASPA

Este método es muy práctico para factorizar polinomios de segundo grado de la forma:

$$x^2 + bx + c \quad \text{y} \quad ax^2 + bx + c$$

Directrices para factorizar trinomio por el método aspa

1. Descomponer en dos factores el primer término formando una columna vertical a la izquierda de estos dos factores descompuestos.
2. A lado de esta columna se forma otra columna vertical derecha que representa la descomposición en dos factores el término independiente incluido el signo estos dos números son buscados por ensayo y error.
3. Se multiplica en aspa (o cruz) los factores de las dos columnas expresando el resultado a lado de cada factor, luego se suman o restan estos resultados que deben coincidir con el término central, si no coinciden se buscan otros números.
4. Los términos escritos en forma horizontal son los factores buscados.

Ejemplo 1. Factorizar $3x^2+20x+12$

Solución

$$\begin{array}{lll} 3x & +3 & \to +3x \\ x & +4 & \to \underline{+12x} \\ & & +15x \quad \text{no cumple} \end{array} \qquad \begin{array}{lll} 3x & +2 & \to +2x \\ x & +6 & \to \underline{+18x} \\ & & +20x \quad \text{cumple} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} (3x+2)\,\text{factor} \\ (x+6)\,\text{factor} \end{array}$$

$3x^2+20x+12=(3x+2)(x+6)$ polinomio factorizado

Ejemplo 2. Factorizar $14a^2-3a-11$

Solución

$$\begin{array}{lll} 7a & +11 & \to +22a \\ 2a & -1 & \to \underline{-7a} \\ & & -15a \quad \text{no cumple} \end{array} \qquad \begin{array}{lll} 14a & +11 & \to +11a \\ a & -1 & \to \underline{-14a} \\ & & -3a \quad \text{cumple} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} (14a+11)\,\text{factor} \\ (a-1)\,\text{factor} \end{array}$$

$14a^2-3a-11=(14a+11)(a-1)$ polinomio factorizado

Ejemplo 3. Factorizar $8y^2-22y+15$

Solución

$$\begin{array}{lll} 2y & -5 & \to -20y \\ 4y & -3 & \to \underline{-6y} \\ & & -26y \quad \text{no cumple} \end{array} \qquad \begin{array}{lll} 4y & -5 & \to -10y \\ 2y & -3 & \to \underline{-12y} \\ & & -22y \quad \text{cumple} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} (4y-5)\,\text{factor} \\ (2y-3)\,\text{factor} \end{array}$$

$8y^2-22y+15=(4y-5)(2y-3)$ polinomio factorizado

3.6 AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS

Directrices de factorizar por agrupación de términos

1. Se agrupan los términos de manera conveniente por ensayo error.
2. Tratar de agrupar de manera que pertenezca algunos de los casos estudiados anteriormente.

Ejemplo 1. Factorizar $x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y$

Solución

$\left(x^3 + x^2y + x^2z\right) + \left(y^3 + y^2x + y^2z\right) + \left(z^3 + z^2x + z^2y\right)$ agrupando términos

$x^2\left(x + y + z\right) + y^2\left(y + x + z\right) + z^2\left(z + x + y\right)$ factorizando los términos en común

$\left(x + y + z\right)(x^2 + y^2 + z^2)$ polinomio factorizado

Ejemplo 2. Factorizar $x^6 + y^6 - x^2y^4 - x^4y^2$

Solución

$\left(x^6 + y^6\right) - \left(x^4y^2 + x^2y^4\right)$ agrupando términos

$\left[\left(x^2\right)^3 + \left(y^2\right)^3\right] - x^2y^2\left(x^2 + y^2\right)$ expresando en suma de cubos y factorizando

$\left(x^2 + y^2\right)\left(x^4 - x^2y^2 + y^4\right) - x^2y^2\left(x^2 + y^2\right)$ descomponiendo la suma de cubos

$\left(x^2 + y^2\right)\left(x^4 - 2x^2y^2 + y^4\right)$ factorizando el polinomio

$\left(x^2 + y^2\right)\left(x^2 - y^2\right)\left(x^2 - y^2\right)$ factorizando el trinomio

$\left(x^2 + y^2\right)\left(x + y\right)\left(x - y\right)\left(x + y\right)\left(x - y\right)$ polinomio factorizado

Ejemplo 3. Factorizar $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$

Solución

$\left(2^3x^3 - y^3\right) + \left(-12x^2y + 6xy^2\right)$ agrupando términos

$\left[\left(2x\right)^3 - y^3\right] - 6xy\left(2x - y\right)$ expresando en diferencia de cubos

$\left(2x - y\right)\left(4x^2 + 2xy + y^2\right) - 6xy\left(2x - y\right)$ factorizando la diferencia de cubos

$\left(2x - y\right)(4x^2 + 2xy + y^2 - 6xy)$ factorizando el polinomio

$\left(2x - y\right)(2x - y)\left(2x - y\right)$ polinomio factorizado

3.7 FACTORIZACIÓN POR REGLA DE RUFFINI

Si un polinomio tiene grado mayor o igual que tres se puede utilizar la regla de Ruffini para su factorización.

Directrices para factorizar aplicando la regla de Ruffini

La regla indica que si un polinomio en *x* es divisible por $x - a$ este se anula para $x = a$

1. Ordenamos el polinomio en forma descendente.
2. Buscamos números divisibles positivos y negativos que anulen al término independiente.
3. Repetimos el paso anterior hasta que se terminen todos los términos.

Ejemplo 1. Factorizar el polinomio x^3-2x^2-x+2

Solución

$$\begin{array}{c|rrrr}
 & 1 & -2 & -1 & 2 \\
1 & \downarrow & 1\times 1=1 & 1\times(-1)=-1 & 1\times(-2)=-2 \\
\hline
 & 1 & -2+1=-1 & -1-1=-2 & 2-2=0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|rrr}
 & 1 & -1 & -2 \\
2 & \downarrow & 2 & 2 \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 \\
-1 & \downarrow & -1 & \\
\hline
 & 1 & 0 &
\end{array}$$

Polinomio factorizado $x^3-2x^2-x+2=(x-1)(x-2)(x+1)$

Ejemplo 2. Factorizar $x^5+2x^4-10x^3-20x^2+9x+18$

Solución

$$\begin{array}{c|rrrrrr}
 & 1 & 2 & -10 & -20 & 9 & 18 \\
1 & \downarrow & 1 & 3 & -7 & -27 & -18 \\
\hline
 & 1 & 3 & -7 & -27 & -18 & 0 \\
-1 & \downarrow & -1 & -2 & 9 & 18 & \\
\hline
 & 1 & 2 & -9 & -18 & 0 & \\
-2 & \downarrow & -2 & 0 & 18 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & -9 & 0 & & \\
3 & \downarrow & 3 & 9 & & & \\
\hline
 & 1 & 3 & 0 & & & \\
-3 & \downarrow & -3 & & & & \\
\hline
 & 1 & 0 & & & &
\end{array}$$

$x^5+2x^4-10x^3-20x^2+9x+18=(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)(x+3)$ polinomio factorizado

Ejercicio 3. Factorizar $2x^4+x^3-x^2+6x-8$

Solución

$$\begin{array}{c|rrrrr}
 & 2 & 1 & -1 & 6 & -8 \\
-2 & \downarrow & -4 & 6 & -10 & 8 \\
\hline
 & 2 & -3 & 5 & -4 & 0 \\
1 & \downarrow & 2 & -1 & 4 & \\
\hline
 & 2 & -1 & 4 & 0 &
\end{array}$$

$2x^4+x^3+6x-x^2-8=(x+2)(x-1)\underbrace{(2x^2-x+4)}_{\text{Imaginario}}$ polinomio factorizado

Ejemplo 4. Factorizar $x^4-8x^3+10x^2+40x-75$

Solución

$$\begin{array}{c|rrrrr}
 & 1 & -8 & 10 & 40 & -75 \\
3 & \downarrow & 3 & -15 & -15 & 75 \\
\hline
 & 1 & -5 & -5 & 25 & 0 \\
5 & \downarrow & 5 & 0 & -25 & \\
\hline
 & 1 & 0 & -5 & 0 &
\end{array}$$

$x^4-8x^3+10x^2+40x-75=(x-3)(x-5)(x^2-5)$ polinomio factorizado

3.8 EJERCICIOS PROPUESTOS

Factorizar los siguientes ejercicios

1. $3c(b+a)-6d(b+a)$ R. $3\left(c-2d\right)\left(a+b\right)$

2. $40xz-10xt+16yz-4yt$ R. $-2\left(5x+2y\right)\left(t-4z\right)$

3. $x^3z-2zx^2+xz-yx^3-xy-3z+3y+2x^2y$ R. $\left(-x+2x^2-x^3+3\right)\left(y-z\right)$

4. $x^{m+n}y^m-x^{2n}y^{m+n}-x^ny^{2m}$ R. $x^ny^m\left(-x^ny^n+x^m-y^m\right)$

5. $\frac{25}{4}a^6+\frac{15}{4}a^3b+\frac{9}{16}b^2$ R. $\left(\frac{5}{2}a^3+\frac{3}{4}b\right)^2$

6. $100x^4y^2-60x^3yz^2+9x^2z^4$ R. $x^2\left(10xy-3z^2\right)^2$

7. $3a^3+2mb^2-3ab^2+2mab-3a^2b-2ma^2$ R. $\left(a^2-ab-b^2\right)\left(3a-2m\right)$

8. $2a^2+2ab-6ac-a-b+3c$ R. $\left(2a-1\right)\left(a+b-3c\right)$

9. $25x^2+30xy+9y^2$ R. $\left(5x+3y\right)^2$

10. $9x^4-30x^2yz+25y^2z^2$ R. $\left(3x^2-5yz\right)^2$

11. $\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{3}\sqrt{2}xy+2y^2$ R. $\left(\frac{x}{3}-\sqrt{2}y\right)^2$

12. $\frac{25}{49}a^6b^2-\frac{10}{7}\sqrt{7c}a^3b+7c$ R. $\left(\frac{5}{7}a^3b-\sqrt{7c}\right)^2$

13. x^2-100 R. $\left(x-10\right)\left(x+10\right)$

14. $9x^2-4y^2$ R. $\left(3x-2y\right)\left(3x+2y\right)$

15. $25x^2y^4-121$ R. $\left(5xy^2-11\right)\left(5xy^2+11\right)$

16. $2a^3bc-18ab^3c$ R. $2abc\left(a+3b\right)\left(a-3b\right)$

17. $4x^2+15x+9$ R. $\left(x+3\right)\left(4x+3\right)$

18. $2x^2-7x-15$ R. $\left(2x+3\right)\left(x-5\right)$

19. $x^2+3x-340$ R. $\left(x+20\right)\left(x-17\right)$

20. $x^2+8x-345$ R. $\left(x+23\right)\left(x-15\right)$

21. $16x^6y^2 - 25z^2$ R. $\left(4x^3y - 5z\right)\left(4x^3y + 5z\right)$

22. $3a^2 + 29a + 56$ R. $\left(a + 7\right)\left(3a + 8\right)$

23. $4m^2 - 4m\left(n - m\right) + \left(n - m\right)^2$ R. $\left(3m - n\right)^2$

24. $x^4y^6 - x^2y^3 - 6$ R. $\left(x^2y^3 + 2\right)\left(x^2y^3 - 3\right)$

25. $9\left(x - y\right)^2 + 12\left(x - y\right)\left(x + y\right) + 4\left(x + y\right)^2$ R. $\left(5x - y\right)^2$

26. $2am - 2an + 2a - m + n - 1$ R. $\left(m - n + 1\right)\left(2a - 1\right)$

27. $3x^3 + 2axy + 2ay^2 - 3xy^2 - 2ax^2 - 3x^2y$ R. $\left(x^2 - xy - y^2\right)\left(3x - 2a\right)$

28. $m^4 - n^4 + m^3 - mn^3 - n^3 + m^3n$ R. $\left(m - n\right)\left(m + n + 1\right)\left(mn + m^2 + n^2\right)$

29. $\left(a + b - c\right)\left(x - 3\right) - \left(b - c - a\right)\left(x - 3\right)$ R. $2a\left(x - 3\right)$

30. $a^3b^3 + 3a^2b^2xy + 3abx^2y^2 + x^3y^3$ R. $\left(ab + xy\right)^3$

31. $4a^2mx + 8a^2nx - 2a^2my - 4a^2ny$ R. $2a^2\left(2x - y\right)\left(m + 2n\right)$

32. $x^2 + y^2 - 4z^2 + 2xy + 3xz + 3yz$ R. $\left(x + y - z\right)\left(x + y + 4z\right)$

33. $x^8 - 1$ R. $\left(x - 1\right)\left(x + 1\right)\left(x^2 + 1\right)\left(x^4 + 1\right)$

34. $x^{10} - y^{10}$ R. $\left(x - y\right)\left(x + y\right)\left(xy^3 + x^3y + x^2y^2 + x^4 + y^4\right)\left(x^2y^2 - xy^3 - x^3y + x^4 + y^4\right)$

35. $u^8 - v^8$ R. $\left(u - v\right)\left(u + v\right)\left(u^2 + v^2\right)\left(u^4 + v^4\right)$

36. $x^9 - 1$ R. $\left(x - 1\right)\left(x + x^2 + 1\right)\left(x^3 + x^6 + 1\right)$

37. $z^4 + 64$ R. $\left(z^2 - 4z + 8\right)\left(4z + z^2 + 8\right)$

38. $8z^4 - 27z^7$ R. $z^4\left(2 - 3z\right)\left(6z + 9z^2 + 4\right)$

39. $4a^4 + 3a^2b^2 + 9b^4$ R. $\left(3ab + 2a^2 + 3b^2\right)\left(2a^2 - 3ab + 3b^2\right)$

40. $16m^4 - 25m^2n^2 + 9n^4$ R. $\left(m - n\right)\left(4m - 3n\right)\left(4m + 3n\right)\left(m + n\right)$